

# UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN

**Enrique Guzmán y Valle**

*Alma Máter del Magisterio Nacional*

## ESCUELA DE POSGRADO



**Tesis**

**Análisis de la organización matemática y didáctica del sentido estocástico en el V  
Ciclo del Sistema Curricular Nacional de Educación Primaria - 2017**

**Presentada por**

Marisol Edith ZELARAYAN ADAUTO

**Asesor**

Daniel Marcos CHIRINOS MALDONADO

Para optar al Grado Académico de  
Maestro en Ciencias de la Educación  
con mención en Educación Matemática

Lima – Perú

2019

**Análisis de la Organización Matemática y Didáctica del Sentido Estocástico en el V  
Ciclo del Sistema Curricular Nacional de Educación Primaria, 2017**

A Dios por sus bendiciones, a mi hija Marisol Caroline por ser fuente de mi inspiración y darme fuerzas para seguir adelante, a mi esposo por su aliento constante, a mis familiares, estudiantes, asesores de esta tesis, colegas y amigos. A todos ellos, mi profundo agradecimiento.

## **Reconocimientos**

Esta investigación es el fruto de muchos aprendizajes en diferentes espacios de mi vida profesional; es por ello que debo reconocer a mis profesores de la escuela de Post grado de la Universidad Nacional de Educación “Enrique Guzmán y Valle” en la mención de Educación Matemática por abrirme el panorama de la investigación en esta área. También a mis maestros de la diplomatura de especialización de didáctica de la matemática del nivel primario de la Pontificia Universidad Católica del Perú quiénes me enseñaron el tratamiento de la matemática y su didáctica en el nivel primario.

Mi reconocimiento especial, a mi asesor de tesis el Doctor Daniel Chirinos Maldonado y a la Magister Lourdes Gálvez Morales por su apoyo constante para la culminación de esta tesis.

Debo reconocer el apoyo alentador de mi hija y mi esposo en esta travesía investigativa. Asimismo, a mis estudiantes y colegas, siento que les debía este pequeño aporte; ellos fueron uno de mis potentes motores para seguir adelante.

## Tabla de Contenidos

Titulo .....	ii
Dedicatoria.....	iii
Reconocimientos .....	iv
Tabla de Contenidos .....	v
Lista de Tablas.....	ix
Lista de Figuras .....	xi
Resumen .....	xii
Abstract.....	xiii
Introducción.....	xiv
<b>Capítulo I. Planteamiento del Problema .....</b>	<b>1</b>
1.1 Descripción de la Realidad Problemática.....	1
1.2 Definición del Problema.....	4
1.2.1 Problema general.....	4
1.2.2 Problemas específicos. ....	4
1.3 Objetivos.....	4
1.3.1 Objetivo general. ....	4
1.3.2 Objetivos específicos. ....	5
1.4 Justificación e Importancia de la Investigación.....	5
1.5 Limitaciones de la Investigación .....	6
<b>Capítulo II. Marco Teórico.....</b>	<b>7</b>
2.1 Antecedentes del Estudio .....	7
2.1.1 Antecedentes nacionales. ....	7
2.1.2 Antecedentes internacionales. ....	11
2.2 Bases Teóricas .....	16

2.2.1 Transposición didáctica.....	16
2.2.2 Teoría antropológica de lo didáctico.....	17
2.2.2.1 La praxeología matemática.....	18
2.2.3 Las tareas en matemáticas.....	20
2.2.3.1 Modificación del modelo de demanda cognitiva para el caso de la estocástica.....	21
2.2.4 El sentido estocástico.....	29
2.2.4.1 Situación aleatoria. Componentes.....	32
2.2.4.2 Experimentos aleatorios.....	35
2.2.4.3 Álgebra de sucesos.....	37
2.2.4.4 Idea de probabilidad.....	38
2.2.4.5 Planteamiento para el cálculo de probabilidad.....	39
2.2.4.6 Procedimientos para calcular probabilidades.....	46
2.2.4.7 Las ideas estocásticas fundamentales.....	60
2.3 Definición de Categorías de análisis.....	68
<b>Capítulo III. Hipótesis y Variables.....</b>	<b>78</b>
3.1 Supuestos Hipotéticos.....	78
3.2 Sistemas y Categorías de Análisis.....	78
<b>Capítulo IV. Metodología.....</b>	<b>80</b>
4.1 Enfoque de Investigación.....	81
4.2 Tipo de Investigación.....	81
4.3 Diseño de Investigación.....	81
4.4 Acceso al Campo. Muestra o Participantes.....	81
4.4.1 Análisis de los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en el Programa Curricular de Educación Primaria V ciclo.....	82
4.4.2 Análisis didáctico del fascículo rutas del aprendizaje del V ciclo.....	107

4.4.3 Praxeología propuesta por el texto escolar del quinto grado de educación primaria. .....	110
4.4.3.1 Tareas ( $Tr_i$ ), técnicas ( $\tau_i$ ), tecnologías ( $\Theta_i$ ) y teorías ( $\Theta_i$ ) de estudio. ....	111
4.4.3.2 Mapas de tareas y técnicas. ....	122
4.4.3.3 Descripción global y razón de ser del concepto de probabilidad propuesto por el texto. ....	122
4.4.3.4 Hechos o fenómenos didácticos ( $\varphi_i$ ) .....	123
4.4.3.5 Lo que no hay y podría haber. ....	130
4.4.4 Praxeología propuesta por el texto escolar del sexto grado de educación primaria. .....	132
4.4.4.1 Tareas ( $Tr_i$ ), técnicas ( $\tau_i$ ), tecnologías ( $\Theta_i$ ) y teorías ( $\Theta_i$ ) de estudio. ....	133
4.4.4.2 Mapas de tareas y técnicas. ....	165
4.4.4.3 Descripción global y razón de ser del concepto de probabilidad propuesto por el texto. ....	165
4.4.4.4 Hechos o fenómenos didácticos ( $\varphi_i$ ) .....	166
4.4.4.5 Lo que no hay y podría haber. ....	177
4.5 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos. ....	179
4.6 Técnicas de Análisis de Datos .....	179
4.7 Procedimiento .....	179
<b>Capítulo V. Resultados</b> .....	181
5.1 Presentación y Análisis de los Resultados.....	181
5.1.1 Respecto al Programa Curricular de Educación Primaria del V ciclo. ....	181

5.1.2 Respecto a las orientaciones metodológicas de las rutas del aprendizaje del V ciclo. .....	189
5.1.3 Respecto a los textos de matemática del V ciclo. ....	190
5.2 Discusión de Resultados .....	195
Conclusiones.....	198
Recomendaciones y propuestas .....	204
Referencias .....	216

## Lista de Tablas

Tabla 1. Análisis teórico de la demanda cognitiva de las ideas estocásticas fundamentales .....	24
Tabla 2. Descripción de los contextos .....	29
Tabla 3. Tabla de frecuencias .....	43
Tabla 4. Datos de sucesos y probabilidades .....	56
Tabla 5. Datos de sucesos y probabilidades .....	58
Tabla 6. Competencias y capacidades matemáticas .....	68
Tabla 7. Estándares de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” .....	73
Tabla 8. Estándar y desempeños del V ciclo .....	74
Tabla 9. Estándares de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del IV, V y VI ciclo .....	84
Tabla 10. Contenido matemático (conocimientos) presentes en los Estándares de Aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del IV, V y VI ciclo.....	87
Tabla 11. Propuesta del contenido matemático (conocimientos) para los Estándares de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del IV, V y VI ciclo.....	88
Tabla 12. Contenido didáctico presentes en los Estándares de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del IV, V y VI ciclo.....	89
Tabla 13. Propuesta del contenido didáctico referido a la estocástica para el IV, V y VI ciclo.....	93
Tabla 14. Análisis y Propuesta del contenido matemático (conocimientos) a los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del quinto grado de primaria en lo referido a la estocástica. ....	96

Tabla 15. Análisis y Propuesta del contenido matemático (conocimientos) a los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del sexto grado de primaria en lo referido a la estocástica .....	100
Tabla 16. Análisis y Propuesta del contenido didáctico a los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del quinto grado de primaria en lo referido a la estocástica.....	102
Tabla 17. Análisis y Propuesta del contenido didáctico a los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del sexto grado de primaria en lo referido a la estocástica.....	104
Tabla 18. Análisis del saber a enseñar del fascículo rutas del aprendizaje del V ciclo referido a la estocástica. ....	108
Tabla 19. Análisis de tareas del texto de quinto grado sobre el sentido estocástico y hallazgos parciales .....	123
Tabla 20. Lo que hay, lo que no hay y podría haber en el texto de quinto grado en relación a las ideas estocásticas fundamentales .....	131
Tabla 21. Análisis de tareas del texto de sexto grado sobre el sentido estocástico y hallazgos parciales .....	166
Tabla 22. Lo que hay, lo que no hay y podría haber en el texto de sexto grado en relación a las ideas estocásticas fundamentales.....	177
Tabla 23. Propuesta de estándares referido a la estocástica .....	204
Tabla 24. Propuesta de contenidos para quinto y sexto grado referido a la estocástica....	206
Tabla 25. Propuesta de ejemplos de desempeños para quinto y sexto grado referido a la estocástica. ....	209
Tabla 26. Propuesta de ideas estocásticas a abordar en los textos de quinto y sexto grado .....	211

## Lista de Figuras

Figura 1. Caracterización de la situación en contexto .....	32
Figura 2. Descomposición de la realidad según el tipo de situación a analizar .....	33
Figura 3. Descomposición de los experimentos aleatorios.....	36
Figura 4. Representación de sucesos en diagrama de Venn .....	38
Figura 5. Representación de sucesos .....	41
Figura 6. Relación entre los tipos de situaciones aleatorias y los planteamientos para el cálculo de probabilidades .....	44
Figura 7. Ejemplo de diagrama de árbol simple .....	46
Figura 8. Ejemplo 1 de diagrama de árbol para sucesos compuesto .....	47
Figura 9. Ejemplo 2 de diagrama de árbol para sucesos compuestos.....	47
Figura 10. Representación de sucesos mutuamente excluyentes .....	48
Figura 11. Representación de sucesos mutuamente no excluyentes .....	48
Figura 12. Representación de los datos del problema .....	51
Figura 13. Representación de los datos del problema .....	51
Figura 14. Representación de la probabilidad condicionada.....	53
Figura 15. Representación de los datos del problema .....	54
Figura 16. Mapa de tareas y técnicas del texto de quinto grado primario referido a la estocástica .....	122
Figura 17. Mapa de tareas y técnicas del texto de sexto grado primario referido a la estocástica .....	165

## Resumen

Habiéndose aprobado el Currículo Nacional de la Educación Básica con Resolución Ministerial N.º 281-2016 y su modificatoria mediante la Resolución Ministerial N.º 159-2017 y el Programa Curricular del nivel Primaria con Resolución Ministerial N.º 649-2016-MINEDU del 15 de diciembre, se estableció su implementación de manera progresiva, empezándose con el nivel primario en el año 2017. Sin embargo, es importante analizar, con un enfoque científico, los propósitos, las orientaciones metodológicas y didácticas, y las actividades matemáticas para la enseñanza y aprendizaje del sentido estocástico en el V ciclo (quinto y sexto grado de primaria), presentes en los documentos y materiales dotados por el Ministerio de Educación con la finalidad de que este quehacer matemático sea más visible en nuestra sociedad de manera óptima. Esta investigación cualitativa tiene como objetivo analizar, describir y caracterizar la organización matemática y didáctica del sentido estocástico en el V ciclo de la Educación Básica. Con este estudio, se espera comprender y mejorar la organización matemática y didáctica del sentido estocástico en los documentos como el Programa Curricular del nivel primario, las orientaciones didácticas dadas a los docentes y el libro de texto de los estudiantes del V ciclo; a fin de tener propósitos claros para la enseñanza y aprendizaje, y una adecuada implementación del currículo de matemática. El mismo que impactará en la mejora de la calidad de los aprendizajes de los estudiantes del nivel de educación Primaria del V ciclo de la Educación Básica.

*Palabras claves:* Sentido estocástico, praxeología matemática, programa curricular, y orientaciones didácticas.

## Abstract

Having approved the National Basic Education Curriculum with Ministerial Resolution No. 281-2016 and its amendment by Ministerial Resolution No. 159-2017 and the Curricular Program of the Primary level with Ministerial Resolution No. 649-2016-MINEDU of the December 15, its implementation was established progressively, beginning with the primary level in 2017, however it is important to analyze, with a scientific approach, the purposes, the methodological and didactic orientations, and the mathematical activities for teaching and learning of the stochastic sense in the V cycle (fifth and sixth grade of primary), present in the documents and materials provided by the Ministry of Education, in order that this mathematical task is more visible in our society in an optimal way. This qualitative research aims to analyze, describe and characterize the mathematical and didactic organization of the stochastic sense in the V cycle of Basic Education. With this study, it is expected to understand and improve the mathematical and didactic organization of the stochastic sense in documents such as the Curricular Program of the primary level, the didactic orientations given to the teachers and the textbook of the students of the V cycle, in order to have clear purposes for teaching and learning, and an adequate implementation of the mathematics curriculum, the same that will impact on the improvement of the quality of the learning of the students of the level of Primary Education of the 5th cycle of Basic Education.

*Keywords:* Stochastic sense, mathematical praxeology, curricular program and didactic orientations

## Introducción

La implementación del Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB) requiere de herramientas curriculares y pedagógicas, así como de materiales educativos alineados con una organización matemática y didáctica coherente y clara en el sentido estocástico. Habiéndose empezado en el nivel primario con la implementación del CNEB en el 2017 no hay un alineamiento de los documentos y materiales en lo referente al sentido estocástico en el V ciclo, lo que impactará en la praxis del docente y en los aprendizajes de los estudiantes.

El presente trabajo de investigación está dividido en cinco capítulos. En el Capítulo I, se presenta el planteamiento del problema que incluye la descripción de la realidad problemática, definición del problema, objetivos, justificación e importancia de la investigación y limitaciones de la investigación. El Capítulo II presenta el marco teórico basado en los antecedentes de estudio, bases teóricas como la transposición didáctica, la teoría antropológica de lo didáctico, las tareas en matemática, modificación del modelo de demanda cognitiva para el caso de la estocástica, el sentido estocástico. En el Capítulo III, se tienen los supuestos hipotéticos de la investigación, así como los sistemas y categorías de análisis. En el Capítulo IV, se presenta la metodología de la investigación, el enfoque, tipo y diseño de investigación, acceso al campo, la muestra o participantes, técnicas e instrumentos de recolección de datos, técnicas de análisis de datos y el procedimiento. El Capítulo V esboza los resultados, la presentación y análisis de los resultados y la discusión de resultados. Finalmente, se presentan las conclusiones de la investigación, algunas recomendaciones a tener en cuenta para otros trabajos de investigación y referencias consultadas.

El principal aporte de la investigación es el análisis de los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en el Programa Curricular de Educación Primaria del V ciclo, el análisis y descripción de los tratamientos didácticos del sentido estocástico en las orientaciones metodológicas de las rutas del aprendizaje del V ciclo y el análisis y caracterización de la praxeología matemática y didáctica del sentido estocástico en los textos de Matemática del V ciclo proporcionado por el Ministerio de Educación, así como el análisis y descripción de la transposición didáctica que ha sufrido el saber del sentido estocástico.

**La Autora.**

## **Capítulo I. Planteamiento del Problema**

### **1.1 Descripción de la Realidad Problemática**

El Currículo Nacional es un instrumento de política educativa de la educación básica en nuestro país; muestra la visión de la educación que queremos y contiene los aprendizajes que se espera que los estudiantes logren durante su formación básica en concordancia con los fines y principios de la educación peruana, los objetivos de la educación básica y el Proyecto Educativo Nacional. Este documento ha sido aprobado mediante Resolución Ministerial N.º 281-2016 y su modificatoria mediante la Resolución Ministerial N.º 159-2017.

Además, permite orientar los esfuerzos del estado y de los actores de la comunidad educativa hacia el logro de aprendizajes pertinentes y de calidad (objetivo estratégico 2 de la política 11 PEN) con “Oportunidades y resultados educativos de igual calidad para todos” (objetivo estratégico 1 de la política 11 PEN) y permite que “Todos logren competencias fundamentales para su desarrollo personal y el progreso e integración nacional” (política 12 PEN)

El Currículo Nacional de Educación Básica cumple también una función pedagógica. Este documento contiene: los retos para la educación básica; los enfoques transversales para el desarrollo del perfil de egreso; las definiciones claves que sustentan el perfil de egreso; las competencias, capacidades y estándares de aprendizaje nacionales de la educación básica; la organización de la educación básica y sus planes de estudio; las orientaciones pedagógicas para el desarrollo de competencias; las orientaciones para la evaluación formativa de las competencias en el aula; y las orientaciones para la diversificación curricular.

En este documento se consigna, como una de las competencias del área de Matemática, la competencia “Resuelve problemas de Gestión de datos e incertidumbre”, y se explicita qué implica en el estudiante la combinación de las siguientes capacidades:

- ✓ Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.
- ✓ Comunica la comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
- ✓ Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.
- ✓ Sustenta conclusiones o decisiones basado en información obtenida.

De la definición de la competencia en el documento, se puede distinguir que el estudiante combina estas capacidades para que analice datos sobre un tema de interés o estudio o de situaciones aleatorias, que le permitan tomar decisiones, elaborar predicciones razonables y conclusiones respaldadas en la información producida. Para ello, el estudiante recopila, organiza y representa datos que le dan insumos para el análisis, interpretación e inferencia del comportamiento determinista o aleatorio de la situación usando medidas estadísticas y probabilísticas. (MINEDU, 2016, pág. 141). A ello, es importante distinguir experimentos deterministas y experimentos aleatorios, y cómo este último se forma en los niños del nivel primaria. Fischbein (1975) refiere que la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos; más bien ésta reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico. En consecuencia, es necesario forjar una cultura científica eficiente en nuestro país que implique el tratamiento del sentido estocástico para abordar situaciones de incertidumbre en el entorno del niño. Asimismo, el programa curricular de Educación primaria, aprobado mediante Resolución Ministerial N.º 281-2016-ED y Modificado mediante RM Nro. 159-2017-ED, forma parte del Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB) y tiene como finalidad contribuir con orientaciones específicas para concretar la propuesta pedagógica del Currículo Nacional en el nivel. Este documento contiene: las características de los estudiantes del

nivel según los ciclos educativos que atiende; orientaciones para el tratamiento de los enfoques transversales; orientaciones para planificar el proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación; tutoría y orientación educativa en el nivel; espacios educativos, materiales y rol del adulto en el nivel; áreas curriculares (contienen los marcos teóricos y metodológicos de las competencias organizados en áreas curriculares y presentan los desempeños alineados con las competencias, las capacidades y los estándares de aprendizaje nacionales); y las competencias transversales.

En consecuencia, en el marco de la implementación del CNEB, es importante reconocer si las herramientas curriculares con que cuentan los docentes, y los materiales y recursos educativos con que cuentan los estudiantes coadyuvan a dicha implementación y a la formación de una cultura científica en nuestro país.

Por ejemplo, las orientaciones metodológicas brindadas en las rutas del aprendizaje del V ciclo en el año 2015 y vigentes a la fecha, constituyen una herramienta curricular de apoyo al docente en su práctica pedagógica. Al respecto, es importante analizar el tratamiento del sentido estocástico en este documento.

También es política del Ministerio de Educación en cuanto a materiales educativos, elaborar o adquirir diversos recursos como soporte a los procesos de aprendizaje de los estudiantes de todas las Instituciones Educativas de gestión pública de nivel primario. En ese sentido, se elabora términos de referencia para la contratación de servicio de formulación de propuesta para la elaboración de materiales como los de matemática dirigidos a estudiantes y docentes de primaria en el marco de implementación a las escuelas para que todos los niños y niñas del país cuenten con recursos educativos para lograr aprendizajes pertinentes y de calidad, permitiendo que las instituciones educativas mejoren sus prácticas con el uso de los recursos distribuidos.

Los textos de los estudiantes del nivel primario no han sido elaborados o adquiridos para el 2019 conforme al Programa Curricular de Primaria vigente y, en consecuencia, el tercer año de implementación del currículo deja a las escuelas de primaria con un recurso poco útil que le permita al docente encontrar coherencia con su práctica pedagógica.

## **1.2 Definición del Problema**

### **1.2.1 Problema general.**

**PG.** ¿Cuál es la organización matemática y didáctica del sentido estocástico en el V ciclo de la Educación Básica?

### **1.2.2 Problemas específicos.**

**PE1.** ¿Cuáles son los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en el Programa Curricular de Educación Primaria del V ciclo?

**PE2.** ¿Cuáles son los tratamientos didácticos del sentido estocástico en las orientaciones metodológicas de las rutas del aprendizaje del V ciclo?

**PE3.** ¿Cuál es la praxeología matemática y didáctica del sentido estocástico en los textos de matemática del V ciclo?

**PE4.** ¿Cuáles son las transformaciones matemáticas que ha sufrido el saber sabio, saber a enseñar y saber escolar del sentido estocástico en el V ciclo?

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo general.**

**OG.** Analizar, describir y caracterizar la organización matemática y didáctica del sentido estocástico en el V ciclo de la Educación Básica.

### **1.3.2 Objetivos específicos.**

**OE1.** Realizar un análisis de los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en el Programa Curricular de Educación Primaria del V ciclo

**OE2.** Analizar y describir los tratamientos didácticos del sentido estocástico en las orientaciones metodológicas de las rutas del aprendizaje del V ciclo.

**OE3.** Analizar y caracterizar la praxeología matemática y didáctica del sentido estocástico en los textos de Matemática del V ciclo proporcionado por el Ministerio de Educación.

**OE4.** Analizar y describir la transposición didáctica que ha sufrido el saber del sentido estocástico.

### **1.4 Justificación e Importancia de la Investigación**

Para el profesor de Educación Primaria, tanto el Programa Curricular, las herramientas pedagógicas como las orientaciones metodológicas dadas en las rutas de aprendizaje y los materiales educativos, como los textos escolares, constituyen una referencia importante para el sentido que le dará a su enseñanza. Puede ser que los saberes presentes en estas herramientas y material educativo coincidan con sus propias concepciones y representaciones, les sea de mucha ayuda o les produzca dudas y confusiones; en todos los casos, el saber que produzca no será del mismo tipo.

El análisis de las herramientas curriculares y materiales educativos (programas, rutas, textos) permitirá evidenciar de qué manera las propuestas didácticas y matemáticas presentes posibilitan la construcción de saberes matemáticos y desarrollan la competencia “Resuelve problemas de Gestión de datos e Incertidumbre”. Y, a partir de ello, se pueda describir y explicar la organización matemática y didáctica que se está dando al sentido estocástico en el nivel primario.

El análisis de la propuesta educativa mediante la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD); del Programa Curricular, Rutas del Aprendizaje; y textos escolares, permitirán mostrar la praxeología matemática y didáctica que se proponen para el estudio del sentido estocástico.

Es importante que se dé un mejor tratamiento del sentido estocástico en los textos escolares, programas curriculares y herramientas pedagógicas, y se hace necesario también la capacitación y actualización del docente de educación primaria en estos saberes matemáticos.

### **1.5 Limitaciones de la Investigación**

El acceso a investigaciones referidas al sentido estocástico es una de nuestras limitaciones más saltantes en esta investigación.

## Capítulo II. Marco Teórico

### 2.1 Antecedentes del Estudio

#### 2.1.1 Antecedentes nacionales.

Gonzales (2014) en su investigación: *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario* de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Esta investigación responde a la siguiente pregunta: ¿Cuál es la organización matemática que se presenta en la organización didáctica para la enseñanza de escala y proporción en un texto de Matemáticas para Arquitectos? Para responder a esta pregunta, la tesista desarrolló una investigación cualitativa con enfoque documental y, a partir de la revisión de un conjunto de investigaciones, todas relacionadas a la problemática, observó las concepciones, dificultades y estrategias de resolución de problemas relacionadas al objeto de estudio. Luego, utilizó estas observaciones para elaborar criterios de análisis de la organización matemática propuesta en el texto. Para identificar la organización matemática, trabajó sobre la base de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999) que se enfoca en el estudio de las praxeologías. Como resultado de este trabajo, la tesista describe la organización matemática que presentan los autores; es decir, los tipos de tareas, las técnicas que presentan y la tecnología que justifica sus técnicas en torno a “la escala”.

Becerra (2015) en su investigación: *Análisis de una organización matemática asociada al objeto cuadriláteros que presenta un libro de texto del quinto grado de educación primaria* de la Pontificia Universidad Católica del Perú. La investigación tiene por objetivo describir y analizar la organización matemática relacionada con el objeto matemático “cuadriláteros” presente en la unidad cuatro de un libro de texto del quinto grado de educación primaria, el cual fue elaborado por encargo del Ministerio de Educación y utilizado por las instituciones educativas públicas de nuestro país. Para dicha descripción, la tesista utilizó los elementos de la teoría Antropológica de lo Didáctico

como son los tipos de tareas, las técnicas involucradas, el discurso teórico y tecnológico que están detrás de dichas técnicas. Asimismo, para el análisis de la organización matemática utilizó los criterios de completitud de Fonseca. Su problema es: ¿Cuál es la organización matemática que presenta un libro de texto del quinto grado de educación primaria en relación a los cuadriláteros?

Se plantea el objetivo general: Describir y analizar la organización matemática relacionada con el objeto matemático “cuadriláteros” en un libro de texto del quinto grado de educación primaria y llega a la conclusión de: sustentar nuestro trabajo en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Ha sido pertinente para identificar 9 tipos de tareas, 23 tareas, 6 técnicas, 14 elementos tecnológicos que integra los diferentes tipos de tareas y una teoría. También, se evidenció que en el libro de texto sólo se identificó cinco técnicas. Además existen pocas preguntas dirigidas al cuestionamiento tecnológico de dichas técnicas, justificación, alcance y validez.

Carrillo (2013) en su investigación: *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú*. Este trabajo tiene por objetivo describir y analizar las organizaciones matemáticas en torno a la función cuadrática en los libros de texto de enseñanza universitaria en la escuela de Economía de una universidad pública de Lima.

Para este trabajo se tomó en cuenta investigaciones relacionadas a la función cuadrática según las dificultades presentadas por los estudiantes y al tratamiento que se daba a la organización matemática del objeto en estudio. Con base en la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999), presentaron una organización matemática de referencia donde definieron los elementos de una praxeología: tareas, técnicas y tecnologías con respecto al objeto de estudio. Apoyados en los criterios que se han definido, presentaron la descripción y análisis de los libros de texto seleccionados en

los cuales se presentó cómo los autores muestran las organizaciones matemáticas en torno a la función cuadrática y cómo estas organizaciones matemáticas contribuyen para enfrentar las dificultades encontradas que tienen los estudiantes en su aprendizaje de la función cuadrática. Se evaluaron las praxeologías de la organización matemática y se hicieron sugerencias para la reorganización didáctica del tema función cuadrática en los libros de texto analizados, teniendo como base los resultados de la descripción y el análisis de dichas praxeologías.

Se formula el problema: ¿Cómo se presentan las organizaciones matemáticas en torno a la función cuadrática en los libros de texto empleados en la enseñanza universitaria en la escuela de Economía? ¿La forma en que es presentada esta organización didáctica contribuye para enfrentar las dificultades que tienen los estudiantes en su aprendizaje del objeto en estudio? Y se abordaron los siguientes objetivos específicos:

- Describir las organizaciones matemáticas desde la concepción epistemológica de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.
- Definir los criterios para el análisis de los libros de texto seleccionados, teniendo en cuenta las dificultades de los estudiantes al ejecutar las tareas y la postura epistemológica adoptada con respecto al objeto en estudio.
- Describir y analizar las organizaciones matemáticas de la función cuadrática en los libros de texto seleccionados.
- Identificar y organizar los tipos de tareas, técnicas y tecnologías relacionadas con la función cuadrática, en los libros de texto según la postura epistemológica adoptada.
- Analizar si la forma en la que los libros de texto organizan el tema en estudio contribuye a superar las dificultades de los estudiantes detectados en trabajos previos.

- Proponer modificaciones a las organizaciones didácticas en torno a la función cuadrática identificada en los libros de texto, tomando en cuenta los resultados de dicho análisis desde la postura adoptada.

Osorio (2012) en su investigación: *Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior de la Pontificia Universidad Católica del Perú*. Esta investigación tiene como objetivo general proponer la introducción natural del concepto de probabilidad desde una concepción subjetiva, y partiendo de la comprensión de lo que es una situación aleatoria. Para lograr este objetivo, la autora se planteó los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar el diseño del proceso de instrucción que actualmente aplicamos para enseñar el concepto de situaciones aleatorias. Para ello, hay que verificar; en primer lugar, que están presentes todos los conceptos que deseamos tener en cuenta desde la propuesta epistemológica del objeto situación aleatoria y; en segundo lugar, que tengamos todos los espacios necesarios para obtener las respuestas de los alumnos a las diferentes actividades, de manera que podamos verificar si el nivel de dominio del tema es cercano al esperado en la configuración epistémica.
2. Implementar el proceso de instrucción. Para ello, hay que considerar un grupo de alumnos. Esta aplicación debemos realizarla con aquellos alumnos que presenten características similares a los grupos con los que se implementó el proceso de instrucción en situaciones anteriores.
3. Analizar la idoneidad del proceso de instrucción, teniendo en cuenta los aspectos epistémico y cognitivo según los descriptores de idoneidad considerados para realizar dicha determinación. Los descriptores de la idoneidad epistémica nos deben permitir determinar qué tan alejada está la configuración epistémica

implementada de la configuración epistémica de referencia, dado que para cada componente de la configuración se ha elegido un grupo de descriptores que permiten observar tal desviación. Dentro de los descriptores de la idoneidad cognitiva y en la componente de aprendizaje, hay que considerar un descriptor que permita analizar si los alumnos logran apropiarse de los significados implementados. Con este descriptor, debemos establecer qué tan alejados están los significados personales (de los alumnos) de los institucionales (los que en teoría queremos alcanzar).

4. Identificar aquellos descriptores de idoneidad en los cuales el proceso de instrucción difiere de lo esperado y proponer mejoras con el fin de enriquecer el proceso.

La investigación se llevó a cabo bajo el enfoque ontosemiótico. Ésta buscaba la valoración de idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad.

La investigadora concluye que se ha logrado que los estudiantes comprendan los conceptos relacionados con la situación aleatoria y están listos para comprender lo que es una probabilidad.

Esta investigación es un referente, porque nos plantea una propuesta epistemológica para la introducción del concepto de probabilidad. En la propuesta, la investigadora caracteriza y presenta componentes de la situación aleatoria: el contexto, las restricciones, el espacio muestral y el suceso, así como la interacción entre ellos.

### **2.1.2 Antecedentes internacionales.**

Chirinos (2004) en su investigación: *Análisis de la actividad del profesor dentro de un proceso didáctico: el caso de los irracionales en la enseñanza secundaria peruana.*

Tesis para optar el grado de Magister en enseñanza de las ciencias con mención en didáctica de la Matemática, de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Esta investigación plantea los siguientes objetivos:

- Analizar la organización matemática escolar propuesta en los programas curriculares oficiales y los libros de textos. ( $O_m$  escolar que debe ser enseñada).
- Analizar dos procesos de estudios dirigidos por dos profesores distintos que conducen y gestionan el proceso de estudio de los números irracionales en la sala de clases.
- Analizar y describir la organización matemática efectivamente construida.
- Analizar y describir las técnicas didácticas utilizada por los profesores.
- Analizar y describir la tecnología didáctica utilizada por los profesores.
- Sintetizar resultados y elaborar conclusiones.

La metodología de la investigación es descriptiva - cualitativa y, para el análisis, se ha basado en el programa oficial escolar del segundo grado de educación secundaria y en dos textos de mayor difusión y uso en el sistema educativo del Perú: Alfonso Rojas Puémape y Manuel Coveñas Naquiche; que, a su vez, son los textos que dicen utilizar los dos profesores que conducen el proceso de estudio de los números irracionales.

El estudio arriba a conclusiones importantes como:

- La organización matemática propuesta por ambos textos en torno a los números irracionales responde al reconocimiento del decimal infinito no periódico y la inmediata aproximación racional y su posterior utilización en la operatoria de los números reales.
- En el texto B, no existe una articulación entre la representación geométrica y la representación numérica en la recta real; en el texto A, no existe esta

representación geométrica que sería de mayor utilidad para dar sentido y comprensión a la representación de un número irracional. No es explícita la diferencia entre aproximar y redondear.

- El texto B utiliza no sólo tres puntos suspensivos, sino “.....” para la expresión decimal no periódica. Ambos textos, no hacen referencia alguna al sentido o significado que se daría a dichos puntos suspensivos.
- La técnica más utilizada en los textos es el reconocimiento del decimal infinito no periódico y la inmediata aproximación a un número racional.

Vásquez (2012) en su investigación: *Medición del impacto del libro de texto en el aula de clases*. University of flensburg. Alemania. 2012. La tesis señala que la educación, en la mayoría de los países, se rige por las líneas establecidas en el currículo que recoge las políticas de cada estado respecto al tipo de ciudadano que desea según el interés de cada comunidad. Uno de los recursos que ayuda a materializar de una forma más sistemática el currículo es el libro de texto. Representa uno de los medios más utilizados en los diferentes niveles de los sistemas educativos: nivel primario, nivel medio y superior. Estos materiales son elaborados por grandes y pequeñas editoriales que confeccionan todo tipo de libros, pero dentro de los que se incluyen los libros de texto. En Latinoamérica, el Centro Regional para el Fomento del Libro en América Latina, El Caribe, España y Portugal, CERLALC (2010) señala que en el año 2009 existían unos 16,011 agentes editores que registraron libros en las agencias ISBN. Brasil es el país con el mayor número de editores, 4523; seguido por Colombia, Argentina, México y Chile. Luego, Honduras con 158. Estos datos dan una idea acerca de la gran cantidad de libros que se editan en América Latina. Estos incluyen muchos libros de texto que se utilizan en los niveles básicos de la escuela como también en el nivel universitario.

En Honduras, “El mercado de libros en general es atendido en gran parte con las importaciones de libros de los Estados Unidos, México, España, Colombia y Costa Rica” (p.188), situación que describe la naturaleza de los libros de texto. Bajo estas condiciones no es difícil darse cuenta que en la mayoría de los casos estos no responderán a las necesidades e intereses de los escolares y universitarios. Se plantea el siguiente problema: ¿Cuál es el impacto del libro de texto en el rendimiento académico de los estudiantes de la clase de estadística de la UPNFM CUR SPS?

Una de sus conclusiones considera que las expectativas del profesor afectan el rendimiento del alumno (Navas, Sampascual y Castejón, 1991). Una correcta elección de libro de texto combinado con la metodología adecuada del maestro mejorará significativamente el rendimiento académico del estudiante. Si el simple uso del libro de texto marca una diferencia en el rendimiento de los estudiantes, combinarlo adecuadamente con la forma de trabajar del docente incrementaría aún más. Entonces, la elección adecuada de un libro de texto es importante y modifica de manera significativa los resultados entre los estudiantes que usan un libro de texto y los que no usan adecuadamente.

Donaldo (2012) en su investigación: *Uso de los libros de texto de matemática en el proceso de enseñanza: un análisis de casos comparado*. Universidad Pedagógica Nacional “Francisco Morazán”. Honduras. 2012. El tema de investigación se centró en el análisis del uso que hacen las y los docentes del libro de texto; específicamente de la Guía para el Maestro como la herramienta pedagógica fundamental para la enseñanza de la matemática en el segundo ciclo de la Educación Básica. Es una investigación de carácter cualitativo desde la perspectiva de la educación comparada. Hace un estudio más profundo con el objetivo de establecer de manera comparativa las valoraciones, el tipo de uso, las diferencias y semejanzas de acuerdo a las competencias básicas requeridas para el servicio

de la docencia, al conocimiento científico de la materia, al conocimiento pedagógico del material y al conocimiento curricular en relación al uso del libro de texto de matemática; aspectos que fueron considerados como las categorías de análisis de tres docentes que participaron en este estudio, categorizadas de acuerdo a los de servicio en Docente Novel, Docente Semi Experimentada y Docente Experimentada.

Se analiza la incidencia que tiene el libro de texto como recurso estratégico para el crecimiento del desarrollo profesional, actualización y transformación social, y cuáles son los principales aportes que ofrece a las y los docentes para el fortalecimiento del conocimiento científico y del dominio de las acciones pedagógicas de acuerdo a las nuevas tendencias para la enseñanza de la matemática, al modelo constructivista planteado en el Currículo Nacional Básico y su Diseño Curricular para la Educación Básica y al enfoque metodológico basado en la resolución de problemas propuestos en los Libros de Texto diseñados para la educación matemática.

Se formula: ¿Cuál es el uso que están haciendo los docentes de la Guía para el Maestro en la enseñanza de la matemática? Y el objetivo general es Analizar el uso que hacen de los Libros de Texto para la enseñanza de matemática los docentes que trabajan en el segundo ciclo de la Educación Básica de la Escuela Urbana Mixta Marco Antonio Andino del Distrito Escolar N° 5 del Departamento de Francisco Morazán. Concluye que: El uso de los libros de texto le da mayor dinámica a la clase y alta participación y actividad a los alumnos y alumnas, prestándole a los docentes un servicio educativo que ellas necesitan porque actúa como un elemento organizador del proceso de enseñanza.

Los libros de texto de matemática, especialmente la Guía para el Maestro, resulta ser muy amigable para los docentes, especialmente para las que tienen mayor experiencia, ya que en ellos encuentran una síntesis selectiva de los contenidos y una propuesta metodológica bien definida que les ayuda para planificar y desarrollar mejor su clase.

## 2.2 Bases Teóricas

### 2.2.1 Transposición didáctica.

“Un contenido de saber, que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El “trabajo” que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica” (Chevallard, 1998, p.45).

El docente necesita tener conocimiento disciplinar, didáctico y práctico para transformar mediante, la reflexión y el análisis didáctico, el saber científico y artístico en un saber enseñado.

“La transposición didáctica remite al paso del saber sabio al saber enseñado y, por lo tanto, a la distancia eventual obligatoria que los separa, da testimonio de ese cuestionamiento necesario, al tiempo que se convierte en su primera herramienta” (Chevallard, 1998, p.16).

Tomando en cuenta que el Programa Curricular, Rutas del Aprendizaje y el texto escolar tienen como propósito enseñar el objeto matemático, sentido estocástico, por medio de situaciones que buscan reconstruir y establecer este concepto, se debe reconocer que existe una distancia que separa esta adaptación didáctica del objeto matemático en sí. Esto hace necesario establecer una permanente vigilancia sobre la correspondencia o coherencia entre el objeto matemático y su adaptación en estas herramientas curriculares y material educativo.

En relación a la transposición didáctica y a sus cuestionamientos se puede reconocer que el programa curricular, rutas de aprendizaje y texto escolar permiten difundir el saber a enseñar, aunque su uso varía en relación a las intencionalidades que puede generar el docente. Estos documentos son herramientas dentro de un salón de clases, le permiten al

docente y estudiante tener una ayuda externa al aula o en algunos casos el docente puede usarlo como una fuente de situaciones de enseñanza donde el saber matemático tiene una utilidad. Cabe aclarar que la calidad del uso en el aula de clase de un texto escolar depende de algunos requerimientos, debe ser observado, manipulado, evaluado, estudiado y de alguna manera “puesto a prueba” antes de llevarlo a un salón de clases; no es simplemente “tener un texto escolar por tenerlo”.

En tanto a la organización de los textos escolares de matemáticas, estos están estructurados por unidades y/o capítulos. En ellos se presentan el contenido matemático junto a un conjunto de situaciones de enseñanza para el estudiante. Esta organización depende de una Praxeología Matemática, razón por la cual se presentan definiciones, propiedades, etc., usando ejemplos como una forma de concretizar estos saberes matemáticos en lo práctico.

### **2.2.2 Teoría antropológica de lo didáctico.**

El enfoque elegido, para investigar el proceso que sigue el saber matemático hasta llegar al saber enseñado en el aula de las herramientas curriculares y el material didáctico, es la teoría antropológica de lo didáctico (TAD).

Bosch & Gascón (2006) refieren que haciendo uso de esta teoría se evidencia que las tareas constituyen un punto esencial a analizar, pues es en esta recae la propuesta educativa y a la vez determinan su éxito. Las tareas conectan lo que ha sido enseñado, cómo ha sido enseñado y lo que se espera que el estudiante haya aprendido; por ello, son el punto de llegada de la propuesta educativa.

Este enfoque postula la necesidad básica de modelizar el conocimiento matemático que se enseña y aprende en la institución escolar, y adopta, un punto de vista institucional, inscribiendo a la problemática didáctica dentro del marco general de las prácticas y actividades humanas. Así, en toda problemática didáctica existe un componente

matemático esencial o conocimiento matemático, cuyo estudio implicado en una problemática didáctica específica es una vía de acceso para el estudio de los fenómenos didácticos subyacentes. (Chevallard, 1992)

### ***2.2.2.1 La praxeología matemática.***

La actividad matemática es una actividad humana que implica la resolución de diversos tipos de problemas y cuestionamientos. Para encontrar la solución (es) se transitan por diversos procesos y como resultado de ello se organizan y reorganizan los objetos matemáticos; es decir, se realiza una organización matemática. Esta organización matemática compleja dotado de componentes (práctica= praxis y teoría = logos) se le denomina praxeología matemática.

...En la actividad matemática, como en cualquier otra actividad, hay dos partes que no pueden vivir una sin la otra. Están, por un lado, las tareas y las técnicas y, por otro lado, las tecnologías y teorías. La primera parte es lo que podemos llamar la “práctica” o, en griego, la *praxis*. La segunda está hecha de elementos que permiten justificar y entender lo que se hace, es el ámbito del discurso razonado – implícito o explícito – sobre la práctica, lo que los griegos hubieran llamado el *logos*...no hay *praxis* sin *logos*, pero que tampoco hay *logos* sin *praxis*. Los dos están unidos como las dos caras de una hoja de papel. Cuando juntamos las palabras griegas *praxis* y *logos*, sale, en castellano, la palabra praxeología. (Chevallard, Bosh y Gascón, 1997, p. 268)

Al respecto Chevallard, Bosh y Gascón (1997) señalaron que una praxeología matemática debe permitir a los estudiantes actuar con eficacia para resolver problemas, y entender al mismo tiempo lo que hacen de manera racional (p. 268)

En consonancia con Chevallard et.al. y para esta investigación, tendremos en cuenta lo siguiente:

$Tr_i$  = tarea i

$t_{ji}$  = técnica j de la tarea i

$\theta_{ki}$  = tecnología k de la tarea i

$\Theta_{mi}$  = teoría m de la tarea i

$[T/t/\theta/\Theta]$  = praxeología

El par  $[T/t]$  constituye el saber hacer (la práctica)

El par  $[\theta/\Theta]$  constituye el saber (la teoría)

La praxeología  $[T/t/\theta/\Theta]$  se constituye en un modelo del proceso de estudio o proceso didáctico de una obra matemática que permite la articulación “coherente” y “pertinente” entre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en vías de alcanzar el propósito del proyecto educativo en el cual se inscriben.

El término “estudio” es considerado en un sentido muy amplio que incluye tanto la actividad matemática que realizan los investigadores como la que realizan los estudiantes.

En tal sentido, las tareas de las Praxeologías matemáticas no solo son un medio para que el estudiante ponga en práctica las técnicas que ha aprendido, sino que además son parte del proceso educativo encaminado a la comprensión y mejoramiento de las tecnologías lo cual se evidencia en el tipo de tareas que se puedan plantear que involucren procesos de razonamiento y resolución de problemas. Así, el “saber hacer” o prácticas concretas, que se realizan para estudiar los problemas y resolverlas, son las denominadas técnicas o “maneras de hacer”. Los algoritmos matemáticos serán casos particulares de las técnicas matemáticas.

Los discursos describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan y que constituyen la tecnología; esto es, la teoría y que se corresponden con el “saber”. Así, en el estudio habrá una organización matemática que responda a unas cuestiones concretas y se caracterice por el uso de un tipo particular de técnicas matemáticas útiles para el caso; lo

que supondrá una tecnología pertinente y necesaria para la misma que se apoyan en una teoría específica.

### **2.2.3 Las tareas en matemáticas.**

“Una tarea matemática escolar es una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje” (Rico y Moreno, 2016, p.244)

Las tareas están íntimamente relacionadas con el propósito de aprendizaje del estudiante y cumplen diferentes funciones. Así, Werner Blum et .al. (2016) señalaron respecto a las funciones de las tareas, lo siguiente: “...en el aula deben fomentar la adquisición de diferentes competencias, y en los exámenes o test de diagnóstico deben hacerse evidentes las competencias que existen o que aún falta desarrollar” (p.97)

Las tareas de matemáticas deben cumplir ciertas características y criterios para elaborarlas, calibrarlas y usarlas como oportunidades de aprendizaje de acuerdo a los propósitos (diagnosticar, evaluar, practicar, sistematizar, crear, investigar, entre otros) que permitan el desarrollo de las competencias matemáticas.

Tomaremos las ideas de Wiggins (1998) citado en García-Medina, A. et al. (2015) para caracterizar a las tareas matemáticas mediante las siguientes propiedades:

- a) Propósitos: la tarea tiene una finalidad definida, un producto o una meta por alcanzar.
- b) Destinatarios o audiencias: las actividades están dirigidas a interlocutores reales, que pueden percibir sus resultados y opinar sobre ellas.
- c) Incertidumbre: requieren enfrentar y resolver problemas poco estructurados y que pueden tener más de una solución (por oposición al típico “problema” escolar, que

incluye todos los datos necesarios y sólo los necesarios, y que tiene una única solución posible).

- d) Restricciones: en la vida real existen siempre limitaciones, lo que hace necesario idear alternativas y tomar decisiones acerca del camino más apropiado o menos malo, en las condiciones dadas.
- e) Repertorio de recursos cognitivos: las situaciones, productos y problemas de la vida real en general no se resuelven a través de un conocimiento o procedimiento específico (como la mayoría de las situaciones escolares), sino que requieren de la activación simultánea de varios de ellos, probablemente adquiridos en distintos momentos y disciplinas.
- f) Proceso: incluye oportunidades para ensayar, consultar recursos, obtener devoluciones y refinar los puntos. (p.61)

Debemos también destacar que, “Las tareas son demandas cognitivas que movilizan conocimientos para su empleo” (Rico, Lupiañez y Molina, 2013, p.97). En tal sentido, tomaremos los planteamientos de Stein et al. (2000) para categorizar el nivel de las tareas matemáticas según la demanda cognitiva, las cuales se diferencian principalmente en el fomento del desarrollo de la comprensión de los significados de los conceptos y procedimientos matemáticos.

### ***2.2.3.1 Modificación del modelo de demanda cognitiva para el caso de la estocástica.***

Las ideas estocásticas fundamentales planteadas por Heitele (1975) y que se vinculan con la enseñanza, las cuales son abordadas en Batanero (2015), son:

- La probabilidad como Normalización de nuestras creencias.
- El conjunto de Todas las posibilidades.
- Equidistribución y simetría.

- Regla de adición de probabilidades.
- Independencia y regla del producto.
- Probabilidad condicional
- Independencia
- Combinatoria
- La variable aleatoria

Estas han sido dadas teniendo como base las tesis planteadas por Bruner. Estas tesis son:

1. El principio decisivo de instrucción en un tema es la transmisión de las ideas fundamentales.
2. Cualquiera de estas ideas puede ser enseñada en forma comprensible a los niños de cualquier edad, siempre que se elija un lenguaje, grado de formalización y actividades adecuadas a su nivel de desarrollo cognitivo.
3. Por tanto, las ideas fundamentales son una guía necesaria alrededor de las cuáles se desarrolla el currículo, desde la escuela primaria a la universidad para garantizar una cierta continuidad. Estas ideas se usarán en diferentes niveles cognitivos y lingüísticos en una “espiral curricular”.
4. La transición de un alumno a un nivel cognitivo superior se facilita si el tema subyacente ha sido estudiado en un nivel de abstracción conveniente y comprendido – dentro de su capacidad – en las etapas educativas anteriores. Es decir, es preferible que el niño comience a estudiar el tema poco a poco, aunque en un principio sólo lo comprenda de forma limitada en lugar de esperar a que madure y se le pueda enseñar directamente en forma más abstracta. (Batanero, 2015, p.11)

Con base en las tesis 3 y 4 se deduce que las ideas estocásticas fundamentales deben usarse en diferentes niveles cognitivos. Asimismo, el paso de un nivel cognitivo a otro dependerá de lo comprendido por el estudiante según la etapa en que se encuentre. Se debe tener en cuenta que el tema estocástico debe ser abordado, en primera instancia, de manera intuitiva para luego propender a una comprensión correcta.

A continuación, presentamos, en la tabla una adaptación del modelo de Stein con la finalidad de determinar la demanda cognitiva, qué supone para los estudiantes enfrentarse a tareas referidas a las ideas estocásticas fundamentales que les son propuestas por el docente.

**Tabla 1.***Análisis teórico de la demanda cognitiva de las ideas estocásticas fundamentales*

	<b>Tareas de baja demanda cognitiva</b>		<b>Tareas de alta demanda cognitiva</b>	
<b>Criterio</b>	Tareas de memorización:	Tareas de procedimientos sin conexiones:	Tareas de procedimientos con conexiones:	Tareas para hacer Estocástica
<b>Ideas estocásticas fundamentales.</b>	Reproduce conceptos, definiciones, fórmulas sin usar procedimiento alguno.	Usa algoritmos o procedimientos. Aplica una fórmula reemplazando datos. Describe el proceso usado. Se centra en obtener una respuesta correcta.	Hace conexiones a través de múltiples representaciones (diagramas de Venn, diagramas de árbol, tablas de contingencia, otros). Interconecta conceptos y procedimientos. Hace comparaciones. Establece diferentes relaciones. No existe una sola forma de hacer el experimento o enfrentar la situación, puede haber diversas formas de hacerlo.	No existe una vía predecible, una aproximación bien realizada, una vía dada por la tarea. Lleva a explorar y entender la naturaleza de los conceptos, procedimientos o relaciones. Demanda uso de saberes previos, monitoreo y autorregulación de sus procesos cognitivos, y un análisis continuo de la tarea para limitar las posibles estrategias de solución. Se accede a conocimientos y experiencias relevantes, y se hace un uso adecuado de ellos a través de la tarea.
<b>La probabilidad como normalización de nuestras creencias.</b>	Reproduce conceptos de sucesos simples y compuesto. Reproduce la fórmula de probabilidad laplaciano, sin realizar procedimiento alguno. Evoca terminologías como: sucesos simples, compuestos, complementarios, sucesos mutuamente excluyentes, no excluyentes, exhaustivos, sucesos independientes, dependientes, otros.	Calcula de manera algorítmica la probabilidad (Laplace) Calcula a probabilidad experimental. Asigna un valor a sucesos aleatorios en la escala de la probabilidad (desde 0 a 1) Opera con los números que representan las probabilidades. Expresa las restricciones y condiciones de una situación o experimento aleatorio. Aplica conceptos básicos de probabilidad para obtener una sola respuesta. Describe fenómenos de azar en diferentes situaciones.	Compara lo creíble con resultados de experimentos y situaciones. Interpreta la probabilidad en término de los sucesos involucrados. Estructura soluciones mediante el diagrama del árbol y visualiza generalizaciones en esta. Compara sucesos dispares. Estima la probabilidad antes de calcularla Interacciona cadenas causales o causas que ocasionan sucesos aleatorios. Interpreta los conceptos de sucesos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples. visibiliza la ocurrencia de sucesos compuestos en el diagrama del árbol. Interpreta las propiedades básicas de la probabilidad de acuerdo a las condiciones de la situación. Grafica la probabilidad. Relaciona el uso del cero para indicar la probabilidad de un suceso imposible.	Observa la realidad y la describe de manera simplificada. Idea modelos para comprender y predecir la realidad. Realiza el trabajo matemático con el modelo creado. Interpreta los resultados en la realidad. Toma decisiones pertinentes al contexto. Elabora sus conclusiones y explica sus decisiones basándose en la información producida. Justifica sus predicciones con base a los resultados de su experimento o propiedades. Hace predicciones con base en la probabilidad de ocurrencia de un suceso y las sustenta. Predice leyes sobre sucesos futuros. Aplica la idea de la probabilidad a cualquier campo de la actividad humana. Hace aproximaciones teóricas con respecto a la mayor probabilidad. Contrasta los efectos observados y sustenta conclusiones sobre los resultados al aplicar la probabilidad. Prueba teorías.

---

<p><b>El conjunto de todas las posibilidades.</b></p>	<p>Reproduce el concepto o definición del espacio muestral.          Hace un inventario evocando todos los sucesos posibles de un experimento ya conocido.          Observa los sucesos dados de un espacio muestral.</p>	<p>Aplica el álgebra de conjuntos para definir los demás sucesos a partir de los sucesos elementales.          Asigna un espacio muestral a cada experimento aleatorio.          Reconoce espacios muestrales incorrectos.          Encuentra la totalidad de sucesos aleatorios de un experimento aleatorio.</p>	<p>Relaciona el uso del uno para indicar la probabilidad de un suceso seguro.          Conecta la probabilidad con la fracción, decimal y porcentaje          Interpreta la información probabilística provenientes de diversas fuentes.          Interpreta que un suceso probable, se asocia a los valores entre 0 y 1.          Compara probabilidades a partir de resultados de experimentos con el azar          Relaciona lo más frecuente, lo menos frecuente, lo favorable y desfavorable con juegos.          Estima casos que son igualmente posibles.          Explora la probabilidad mediante experimentos que produzcan pocos resultados.          Representa la probabilidad de sucesos con fracciones comunes.          Verifica el grado de creencia.          Interpreta afirmaciones de la vida cotidiana sobre probabilidades.          Genera y caracteriza sucesos.          Hace predicciones y compara con los resultados obtenidos          Predice y describe la probabilidad de un suceso.          Verifica conjeturas          Evalúa /estima los chances de ganar en experimentos simples (por ejemplo, al jugar a los dados).          Comprueba sus estimaciones de probabilidad.          Interpreta probabilísticamente las operaciones con sucesos.          Representa cada suceso posible como un subconjunto del espacio muestral.          Reconoce que la relación de orden de sucesos en un experimento compuesto no siempre se conserva.          Compara probabilidades sin cuantificar.          Ordena sucesos dados.          Interpreta el espacio muestral.          Predice cuál es el suceso que ocurrirá en vez de calcular la probabilidad pedida.</p>	<p>Aclara los modelos mediante experimentos o argumentaciones.          Realiza una modelación estocástica simple (usa para esto la computadora) y las diferencias de los modelos de urna.          Emite juicios con base en su propia experiencia.</p> <p>Construye un espacio muestral.          Axiomatiza la probabilidad (como medida normada aditiva sobre el álgebra de conjuntos).</p>
	<hr/>			

<b>Equidistribución y simetría.</b>	Reproduce el concepto de equidistribución (igualdad de probabilidad) y simetría. Oberva la igualdad de probabilidad de cada resultado, dados.	Divide la probabilidad uno entre el número de sucesos. Verifica las condiciones de simetría (ninguno de los resultados posibles tiene mayor ventaja que el resto), en juegos de azar.	Establece una relación de orden entre los sucesos de un único experimento. Establece criterios de cómo asignar probabilidades a los sucesos elementales. Deducer la regla de Laplace. Contrasta las creencias que algunos resultados son más fáciles que otros. Manipula materiales simétricos y no simétricos para desarrollar la idea de simetría.	Contrasta la equidistribución por medio de la adecuación del modelo.
<b>Regla de adición de probabilidades.</b>	Reproduce la regla de adición de probabilidades.	Calcula la probabilidad de un suceso contrario a uno dado. Aplica la regla de la adición para dos o tres sucesos. Calcula la probabilidad de un suceso compuesto a partir de sus sucesos simples. Calcula la probabilidad para el caso de variables aleatorias continuas.	Extiende la regla de adición a un número mayor de sucesos finitos.	Extiende la regla de adición a un número infinito de sucesos al trabajar con distribuciones de probabilidad.
<b>Independencia y regla del producto.</b>	Evoca de manera memorística la regla del producto.	Empieza la regla de la multiplicación Halla el producto cartesiano de dos o más experimentos simples.	Relaciona sucesos mutuamente excluyentes, dependientes e independientes con la regla del producto. Representa la regla del producto en un diagrama de árbol.	Concibe la idea de un producto infinito de experimentos.
<b>Probabilidad Condicional.</b>	Evoca de manera memorística la fórmula de la probabilidad total.	Calcula la probabilidad condicional. Reconoce los sucesos implicados en la probabilidad condicional.	Hace inferencias haciendo uso de la probabilidad condicional. Relaciona los sucesos dependientes con la probabilidad condicional. Representa la probabilidad condicional en diagramas de Venn y tabla de contingencia.	Mide la asociación de variables. Infiere los axiomas del espacio muestral al espacio muestral reducido donde se calcula la probabilidad condicional.
<b>Independencia.</b>	Reproduce el concepto de sucesos independientes.	Utiliza la independencia en juegos de azar.	Verifica que dos sucesos provenientes del mismo experimento, son independientes si cumplen la ecuación: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .	Desarrolla la teoría de errores y los teoremas de límite a partir de la independencia de sucesos.
<b>Combinatoria.</b>	Reproduce las fórmulas de combinatoria, sin realizar procedimiento alguno.	Utiliza técnicas de recuento para calcular el número de elementos favorables y desfavorables a un suceso.  Empieza la combinación y permutación.	Conecta combinatoria y probabilidad a través de experimentos compuestos. Interpreta el espacio muestral de las variaciones. Usa el diagrama del árbol para la combinatoria (visualiza la técnica de configuración de las producciones) y experimentos compuestos (visualiza la estructura multipaso).	Define las operaciones combinatorias mediante experimentos aleatorios (con o sin reemplazo, ordenado o no).

---

<b>La variable aleatoria.</b>	Reproduce el concepto o definición de variable aleatoria.	Experimenta con variables aleatorias discretas como: encontrar el número de puntos a conseguir en juegos y experimentos (dados, monedas y otros). Experimenta con variables aleatorias continuas como: estimar el tiempo de espera del bus, temperatura ambiente, etc. Describe la distribución empírica de los errores al realizar medidas repetidas de una misma cantidad.	Interpreta la estructura interior de los experimentos y el encadenamiento de sucesivos experimentos en un complejo mayor. Utiliza situaciones combinatorias en contexto de juegos. Relaciona las familias de distribuciones y sus propiedades. Estima la dispersión en los errores de la medida para obtener el modelo. Estima la esperanza matemática de variables aleatorias como: el tiempo promedio que tardaremos en arreglarnos, el gasto promedio que gastaremos en compras, etc.	Explica la presencia de la distribución normal en fenómenos a partir del teorema central del límite.
<b>Las leyes de los grandes números.</b>	Reproduce el teorema fundamental de la teoría de la probabilidad (ley de los grandes números).	Observa la convergencia empírica en la realidad: p.ej. observa las gotas de lluvia en un pavimento, la proporción de recién nacidos mujeres en un hospital a lo largo del año, otros.	Relaciona que la frecuencia relativa se aproxima a la probabilidad teórica a medida que aumenta el número de intentos (ley de los grandes números). Recoge datos para estimar la probabilidad mediante la frecuencia relativa.	Evalúa probabilidades y valores esperados de forma experimental.
<b>Muestreo.</b>	Reproduce el concepto o definición de muestreo. Evoca de manera memorística las técnicas de muestreo.	Reconoce patrones y relaciones entre variables. Emplea técnicas de muestreo. Verifica la representatividad de la muestra. Reconoce la variabilidad de la muestra. Reconoce muestras sesgadas para no tomar decisiones parcializadas.	Analiza la forma y condiciones en que fueron recogidos los datos de la muestra. Interconecta la naturaleza estadística de sus conclusiones en cada caso particular. Relaciona las consecuencias de una decisión equivocada.	Hace inferencias con base en una muestra. Da juicios de valor con base en una muestra. Deduce las posibilidades que la muestra tiene como modelos para explicar la realidad.
<b>Simulación.</b>	Reproduce el concepto de simulación.	Observa los resultados del segundo experimento. Opera con los resultados del segundo experimento. Utiliza los resultados del segundo experimento para obtener información del primero. Sustituye convenientemente el experimento de la realidad (el sexo de un recién nacido) por otro experimento al azar (una urna con dos bolas, fichas o tarjetas para representar ambos sexos).	Interpreta los caracteres retenidos en la modelización. Simula experimentos aleatorios compuestos con modelos de urnas convenientemente escogidos. Verifica las proporciones $p$ y $q$ , además $p + q = 1$	Especifica una hipótesis matemática sobre el fenómeno estudiado simplificando la realidad. Simula un experimento con $r$ sucesos diferentes (usar bolas de $r$ colores distintos respetando las probabilidades correspondientes).

---

Los niveles de demanda cognitiva o grados de dificultad en las tareas permiten alcanzar aprendizajes en diferentes niveles de complejidad y contribuir con los diversos ritmos de aprendizaje de quiénes aprenden.

Siendo el propósito educativo en nuestro país, el desarrollo de competencias, es imprescindible que el estudiante se enfrente a tareas diversas y retadoras que implique explorar, recrear y comprender la naturaleza de los conceptos matemáticos y que le permita autorregular sus procesos en niveles cada vez mayores de demanda cognitiva.

Así también, “Las tareas constituyen indicadores para detectar la existencia de errores en las actuaciones de los escolares, suministran la vía para superarlos, y brindan criterios para evaluar esa superación” (Rico, Lupiañez y Molina, 2013, p.97). Diseñar, seleccionar o trabajar tareas con la finalidad de superar los errores o dificultades del estudiante implica la movilización de procesos y procedimientos destinados a desarrollar niveles más profundos de comprensión de conceptos e ideas matemáticas.

En consecuencia, para que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas, es indispensable plantear buenas tareas que les permitan, guiar su aprendizaje, crear y recrear las matemáticas, construir significados, motivarse y encontrarle sentido a la matemática que aprenden.

Las tareas planteadas en situaciones de diversos contextos son las que le dan sentido a la matemática. Cabe resaltar que nuestro país es mega diverso, lo cual enriquece el tratamiento y la gestión de las matemáticas con diversos significados.

A continuación, presentamos la descripción de los contextos, según el marco PISA citado en Rico et al. (2016), donde se pueden ubicar las tareas que se le plantean a los estudiantes para que estos las doten de significado:

**Tabla 2.***Descripción de los contextos*

<b>Situación</b> <b>¿En qué situación se ubica el problema?</b>	<b>Descripción</b>
Personal.	Relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. El problema afecta de manera inmediata al alumno.
Educativas, ocupacionales o laborales.	Situaciones que el alumno encontraría en un centro escolar o puesto de trabajo.
Públicas.	Las situaciones propias de la comunidad en la que el alumno se encuentra inmerso y la información que aparece en los medios de comunicación.
Científica.	Interpretación de problemas científicos. Estas situaciones son más abstractas.

Fuente: Rico et. Al. (2016), p. 248.

Es necesario resaltar que las situaciones en el contexto se van complejizando desde tareas que se ubican en situaciones personales hasta las tareas que se encuentran en situaciones científicas.

En esta investigación utilizaremos la tabla 1 y 2 para analizar, el Programa Curricular del V ciclo (estándar, capacidades, desempeños) y las tareas propuestas en el texto, así como para plantear algunas propuestas.

#### **2.2.4 El sentido estocástico.**

Según Rico et al. (2016), las competencias matemáticas destacan las formas de conocer, comprender y usar las matemáticas en un contexto. A esto se le conoce como sentido matemático escolar porque está vinculado con las temáticas del área. Ellos destacaron cuatro sentidos o “categorías fenomenológicas” para los contenidos: sentido numérico, sentido espacial, sentido de la medida y sentido estocástico.

El sentido estocástico usa las nociones de estadística y probabilidad para: abordar situaciones de incertidumbre; formular preguntas, para después recoger, organizar y presentar datos; seleccionar, utilizar y validar métodos con los que

analizar datos, conjeturar y evaluar inferencias y predicciones; estudiar y abordar situaciones de aleatoriedad para evaluar la posibilidad, imposibilidad o seguridad de determinados hechos y sucesos. (Rico et al., 2016, p.92)

Heitele (1975), quien propuso las ideas fundamentales en estocástica, señala que estas deben tenerse en cuenta para elaborar un diseño curricular coherente sobre la misma. Recordemos que estas ideas se vinculan con la enseñanza y son abordadas en Batanero (2015), las cuales son:

- La probabilidad como normalización de nuestras creencias.
- El conjunto de todas las posibilidades.
- Equidistribución y simetría.
- Regla de adición de probabilidades.
- Independencia y regla del producto.
- Probabilidad condicional.
- Independencia.
- Combinatoria.
- La variable aleatoria.
- Las leyes de los Grandes Números.
- Muestreo.
- Simulación.

Estas ideas fundamentales han tenido un papel importante en el desarrollo del Cálculo de Probabilidades.

Al respecto, Carmen Batanero (2015), en su artículo “Ideas estocásticas fundamentales, ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de Probabilidad?”, señala la necesidad de un principio de organización en forma de espiral curricular de estas ideas

fundamentales, pues pueden ser enseñadas con diferentes grados de formalización creciente desde la escuela primaria a la Universidad.

Por otro lado, Ana Bressan y Oscar Bressan (2008) señalaron:

Si pensamos con detenimiento, en cierto sentido la estadística y la probabilidad resultan antagónicas. Por ejemplo, un problema de probabilidad es tirar un dado bien equilibrado (es decir, que no sea un dado “cargado” o “tramposo” que privilegia algunos resultados) y calcular cuánto vale la probabilidad de obtener un cierto resultado (por ejemplo, que salga un 4). Un problema estadístico es tomar un resultado de muchísimas tiradas de un dado y decir si esos resultados se ajustan o no con la hipótesis de que el dado estaba bien equilibrado y no era un dado cargado o tramposo; es decir, en algún sentido el problema inverso al anterior.

Sabiendo de entrada la probabilidad, podemos deducir las características de un conjunto de sucesos (uno de los objetivos de la probabilidad) y, conociendo los resultados de un conjunto de sucesos, podemos tratar de deducir su probabilidad (uno de los objetivos de la estadística). (p. 21)

Por todo lo antes señalado, podemos decir que la estocástica es un sistema cuyo comportamiento es intrínsecamente no determinista. Por tanto, el sentido estocástico es un proceso que está sometido a la incertidumbre y que se conecta con la estadística.

En la presente tesis tomaremos la propuesta epistemológica de la investigación de Augusta Osorio (2012) para la introducción del concepto de probabilidad:

- a) Situación aleatoria. Componentes.
- b) Experimentos aleatorios.
- c) Álgebra de sucesos.
- d) Idea de probabilidad.
- e) Planteamiento para el cálculo de probabilidad.

### 2.2.4.1 Situación aleatoria. Componentes.

Osorio (2012) plantea que una situación es aleatoria cuando hay en ella incertidumbre. Sólo se puede dar un conjunto de posibles resultados, pero no es posible saber cuál será el resultado que se obtendrá de su ejecución hasta que no se haya concluido con la misma.

Dada una situación en un contexto, el observador de la misma determinará si hay o no incertidumbre antes de su ejecución.

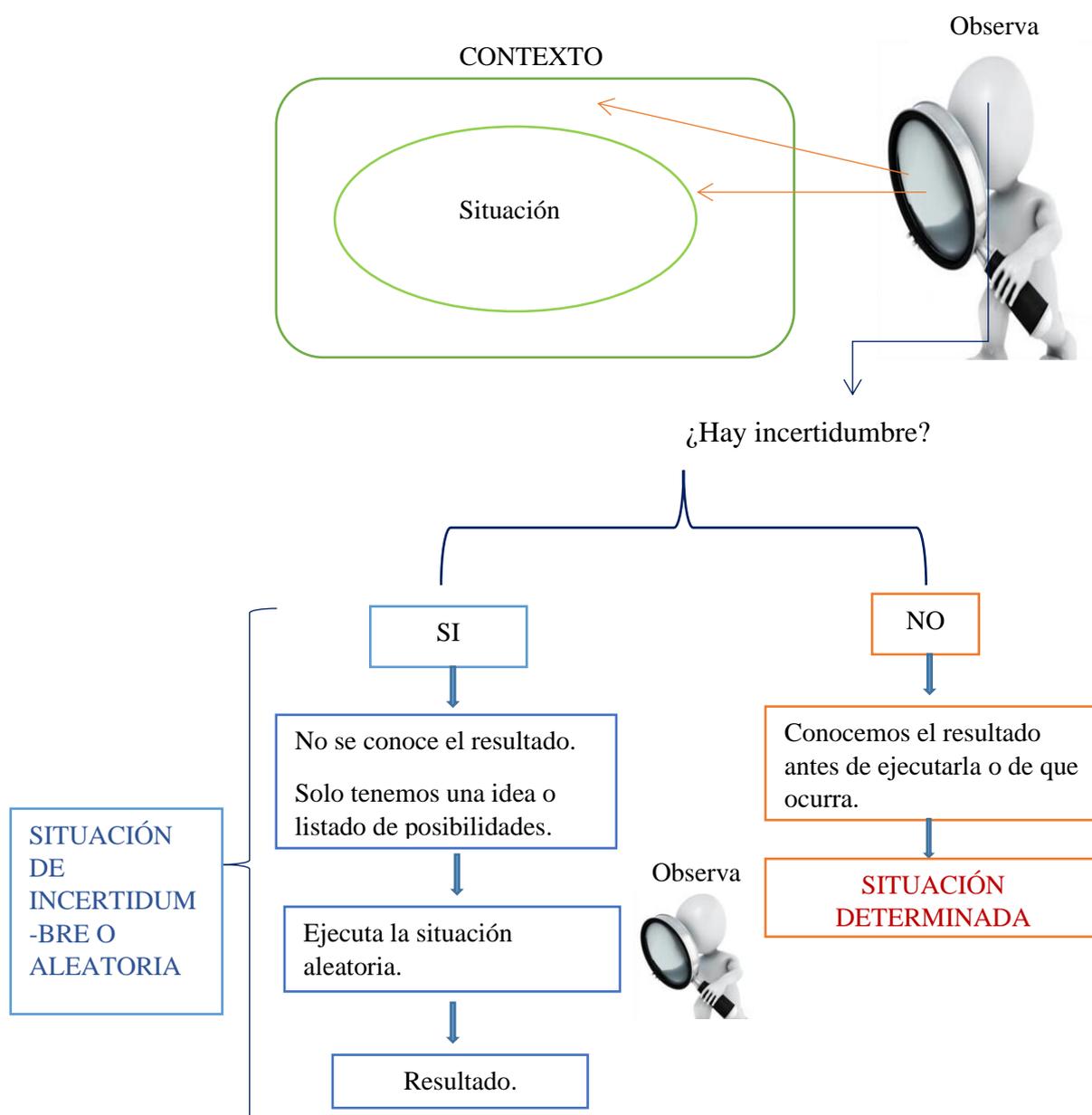


Figura 1. Caracterización de la situación en contexto

Como se puede observar en la figura 1, la realidad se ha dividido en dos tipos de situaciones muy básicas: las situaciones determinadas y las situaciones de incertidumbre o aleatorias.

A. *Tipos de situaciones de incertidumbre (aleatoria).*

- a) Situaciones de incertidumbre reproducibles bajo las mismas condiciones.
- b) Situaciones de incertidumbre no reproducibles bajo las mismas condiciones.

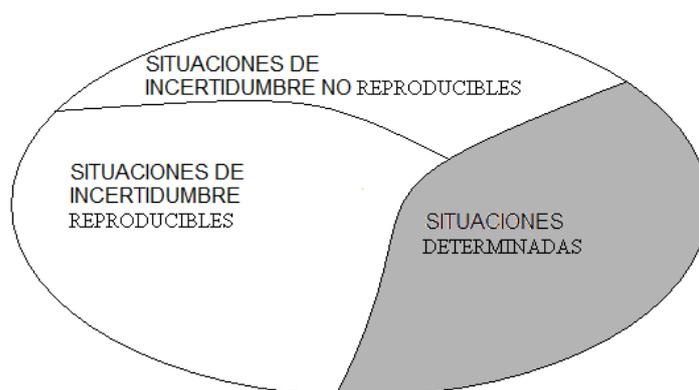


Figura 2. Descomposición de la realidad según el tipo de situación a analizar

Fuente: Osorio (2012, p.26)

Ejemplos de situaciones deterministas:

- El resultado de lanzar una pelota de fútbol por una ventana desde el segundo piso solo tiene un posible resultado: caer por efecto de la gravedad.
- El resultado del nacimiento de un niño luego de haberse hecho la ecografía para saber el sexo.

Ejemplo de situación de incertidumbre (aleatoria) no reproducible:

- El resultado del parto del último hijo de Mery (varón o mujer), sabiendo que no se hizo ecografía y, luego del parto, se le realizará una esterilización definitiva.

Ejemplos de situaciones de incertidumbre (aleatoria) reproducibles:

- El resultado obtenido de ir a pescar a Órganos, una pequeña aldea de playa al sur de Máncora.

- El resultado obtenido de lanzar un dado no cargado al aire.

*B. Componentes de una situación aleatoria.*

*a) El contexto*

Es la porción de la realidad, que puede ser personal, educativa, ocupacional o laboral, pública o científica a la que pertenece la situación de incertidumbre o aleatoria.

Ejemplo:

Contexto: Personal.

Un estudiante ha llevado cierta cantidad de dinero como propina y no podrá comprar más de dos productos. Se sabe que el quiosco de su escuela solo vende tres variedades de productos: fruta, golosina y refresco. Además, la madre del estudiante le ha prohibido comprar golosinas.

La situación de incertidumbre es:

- Verificar los tipos de productos que el estudiante comprará en el quiosco de su escuela.

*b) Las restricciones*

Osorio (2012) manifiesta que son las consideraciones que vienen declaradas dentro del contexto y que nos permitirán el establecimiento de nuevas condiciones o directamente de los posibles resultados de la situación aleatoria.

Ejemplo:

Solo puede comprar dos productos.

*c) Las condiciones*

Nos ayudan a establecer los posibles resultados de la situación aleatoria. Estas pueden surgir de las restricciones.

Ejemplo:

El estudiante no podrá comprar golosinas pues lo tiene prohibido por su madre.

*d) El espacio muestral (EM) de la situación de incertidumbre*

Es el conjunto de todos los posibles resultados de la ejecución de la acción inmersa dentro de la situación aleatoria propuesta y que depende de las restricciones y condiciones del contexto. (Osorio, 2012, p.27)

Ejemplo:

$$E = \{(fruta, refresco); (fruta, fruta); (refresco, fruta); (refresco, refresco)\}$$

El contexto y la definición de la situación de incertidumbre siempre condicionan la forma en que se entienden los demás componentes. Es decir, basta un cambio en el contexto, en alguna restricción o una palabra en la definición de la situación de incertidumbre para que se altere el espacio muestral y por ende los sucesos simples o compuestos. (Osorio, 2012, p.28)

*e) El suceso o evento simple*

“Es cada uno de los posibles resultados de la situación aleatoria y que conforman el espacio muestral; el evento simple también puede ser denominado posibilidad”. (Osorio, 2012, p.27)

*f) El suceso o evento compuesto*

“Es cada uno de los elementos del conjunto potencia del espacio muestral, que no es un suceso o evento simple”. (Osorio, 2012, p.27)

**2.2.4.2 Experimentos aleatorios.**

“Son situaciones de incertidumbre reproducibles (bajo el mismo contexto, restricciones y condiciones)”. (Osorio, 2012, p.29)

A. *Tipos de experimentos aleatorios o situaciones aleatorias.*

- a) Experimentos aleatorios con espacios muestrales equiprobables: Todos los sucesos del espacio muestral tienen la misma factibilidad de ocurrir.

Ejemplo:

El lanzar una moneda no cargada al aire. Cara y sello tienen la misma posibilidad de salir.

- b) Experimentos aleatorios con espacios muestrales no equiprobables: Cuando existe en el espacio muestral, algún o algunos sucesos que pueden ocurrir con mayor frecuencia que otras.

Ejemplo:

Se está rifando un televisor y se han vendido 500 boletos. Caroline ha comprado 300 boletos, y la mayoría de personas solo ha comprado entre dos y un boleto; por lo que Caroline tendrá más posibilidades de ganar, ya que es más probable que salga un boleto de los que compró ella.



Figura 3. Descomposición de los experimentos aleatorios

Fuente: Osorio (2012, p.31)

### 2.2.4.3 Álgebra de sucesos.

Según Rico y Segovia, 2016:

- a) Suceso (evento o acontecimiento) seguro: Es aquel que ocurre siempre.
- b) Suceso (evento o acontecimiento) imposible: Es el que no ocurre nunca. Se representa con  $\phi$ .
- c) Suceso simple o elemental: Es aquel que no puede descomponerse en otros.
- d) Suceso compuesto: Es aquel que está formado por más de un resultado posible.
- e) Suceso complementario de un suceso A: Es el suceso “A no ocurre”. Se representa  $\bar{A}$ .
- f) Suceso unión de dos sucesos A y B: Es el suceso definido por “al menos uno de los sucesos A o B ocurren”. Se representa  $A \cup B$ .
- g) Suceso intersección de dos sucesos A y B: Es el suceso “A y B ocurren (a la vez o uno detrás de otro)”. Se representa  $A \cap B$ .
- h) Sucesos excluyentes o incompatibles: Se dice que dos sucesos A y B son incompatibles o mutuamente excluyentes sino pueden ocurrir a la vez. Si ocurre A, entonces no ocurre B, y si B ocurre, entonces A no ocurre. A y B no tienen ningún elemento en común.
- i) Sucesos exhaustivos: “Un conjunto de eventos es exhaustivo si incluye a todos los eventos posibles”. (Pagano, 1998, p.165).

Observemos estas definiciones en el diagrama de Venn, también empleado en lógica y teoría de conjuntos.

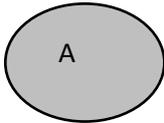
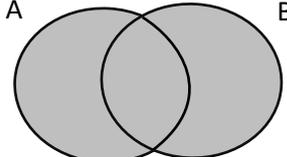
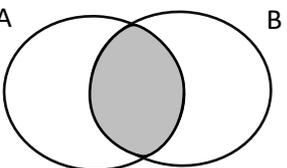
Suceso	Símbolo	Representación (en gris)
A ocurre	A	EM 
A no ocurre	$\bar{A}$	EM 
Al menos uno de los sucesos A o B ocurre	$A \cup B$	EM 
A y B ocurren (a la vez)	$A \cap B$	EM 

Figura 4. Representación de sucesos en diagrama de Venn

Fuente: Rico y Segovia (2016, p.432)

#### 2.2.4.4 Idea de probabilidad.

“El intento de medir cuánto puede ocurrir un suceso conduce a la noción de probabilidad”. (Rico y Segovia, 2016, p.434).

“La probabilidad es el número que se asocia a cada suceso simple y que mide la factibilidad de ocurrencia con que se puede dar ese suceso simple o posibilidad del espacio muestral cuando se ejecuta la situación de incertidumbre”. (Osorio, 2012, p.33)

Osorio (2012) detalla que cada espacio muestral tiene asociado a él una valoración total de factibilidad de ocurrencia, la cual se puede repartir entre todos sus componentes de alguna forma. Presenta un ejemplo intuitivo del reparto de una torta entre un grupo de invitados donde cada invitado recibirá un pedazo, pero no siempre del mismo tamaño. Señala que cada invitado es un suceso simple de un espacio muestral finito, pero ¿qué sucede si el espacio muestral es infinito? Cuando esto ocurre, se puede deducir que el

pedazo de torta que recibirá cada suceso simple será tan ínfimo que prácticamente es cero, pero sí existe un valor al hablar del pedazo total que le corresponde a un grupo de invitados.

Agrega que, si nos basamos en esta idea de la repartición, lo más natural para representar los valores de la probabilidad parece ser el utilizar porcentajes. Por tanto, es lógico pensar que el valor de probabilidad que se asocia a cada suceso simple es un número entre 0 y 1, y que además debe cumplirse que la suma de las probabilidades de todos los elementos de un espacio muestral suma siempre 1. Luego, también tiene sentido pensar que la probabilidad de un suceso compuesto es determinada como la suma o reunión de las probabilidades de cada uno de los eventos simples que lo componen.

Finalmente, también señala que la posibilidad es cada uno de los resultados dentro de la situación de incertidumbre; mientras que la probabilidad es el valor que asociamos a esa posibilidad y que indica el valor de factibilidad que tiene la posibilidad de ocurrir cuando se da la situación de incertidumbre.

#### ***2.2.4.5 Planteamiento para el cálculo de probabilidad.***

Existen diferentes puntos de vista sobre la forma de realizar la medida de la posibilidad. Es así que se puede asignar una probabilidad a un suceso desde diversas interpretaciones según sea el caso.

##### *A) Interpretación clásica*

Se llama también probabilidad a priori, pues es posible conocer el resultado antes de llevar a cabo el experimento. Este punto de vista fue establecido por Laplace (1812) quién sostiene que “probabilidad es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos igualmente posibles”. Esta interpretación supone la equiprobabilidad de todos los resultados posibles en situaciones reproducibles bajo las mismas condiciones, y se aplica cuando el número de resultados es finito.

Se puede expresar así:

Si  $EM = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ ;  $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) \dots = P(x_k)$ , entonces

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables de ocurrencia del suceso } A}{\text{Número de casos posibles}}$$

Limitaciones:

- Muchas veces es difícil comprobar la equiprobabilidad.
- Sólo es aplicable cuando el número de resultados es finito.

Ejemplo 1:

Caroline necesita sacar el número 5 al lanzar un dado no cargado para ganar el juego. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado Caroline gane el juego?

Solución:

Contexto: Personal

Situación de incertidumbre: Verificar el número del dado que sacará para ganar.

Desde el contexto:

- Restricción: Sacar el número 5 del dado.
- Condición: Gana el juego si saca el 5.

El espacio muestral será:

$$EM = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Hay seis (6) sucesos simples que conforman el espacio muestral y cada uno de los sucesos tienen la misma probabilidad de salir al ejecutar el experimento. Como el EM es equiprobable y finito; entonces, podemos aplicar la regla de Laplace.

Sea el suceso  $A =$  obtener el número 5.

Hay un (1) suceso simple que conforma el suceso  $A$ .

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables de ocurrencia del suceso } A}{\text{Número de casos posibles}}$$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = 0,17$$

$$P(A) = 17\%$$

La probabilidad de que Caroline gane el juego es de 17%.

Ejemplo 2:

En una tómbola dominical, se está jugando el juego del cuy. Este juego consiste en adivinar en qué número de caja entrará el cuy luego de soltarlo.

Caroline ha apostado que el cuy se meterá a la caja número 1, ¿será justo este juego para Caroline? ¿Por qué? ¿Qué le aconsejarías a Caroline?

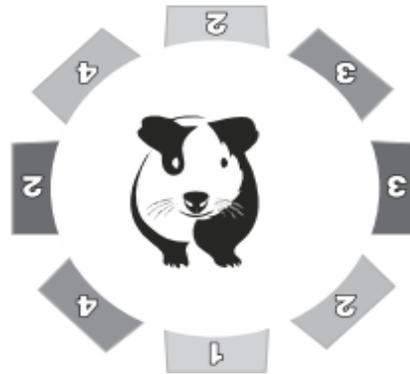


Figura 5. Representación de sucesos

Solución:

Contexto: Público

Situación de incertidumbre: Verificar el número de caja donde se meterá el cuy

Desde el contexto:

- Restricción: El cuy se meterá solo en una caja en una vez.
- Condición: Gana la apuesta si el cuy ingresa al número de caja que se anunció.

$$EM = \{1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4\}$$

EM es finito, pero no es equiprobable por tanto no se puede aplicar la regla de

Laplace.

El juego no es justo para Caroline porque todos los sucesos simples que conforman el espacio muestral no tienen la misma probabilidad de salir. Le aconsejo que apueste al número 2.

En la vida real no siempre las situaciones son simples, sino que se presentan situaciones complejas que requieren el cálculo de probabilidades desde otro enfoque.

### *B) Interpretación frecuentista*

Se llama también probabilidad a posteriori o probabilidad de frecuencia relativa, debido a que se obtiene el resultado después de llevar a cabo el experimento un gran número de veces en situaciones de incertidumbre reproducibles bajo las mismas condiciones y con espacio muestral no equiprobable.

Richard Von Mises (1883-1953) defendió este punto de vista como muy importante porque pone a la probabilidad en la misma metodología de las ciencias naturales.

Esta probabilidad se basa en una ley empírica que asegura la “estabilidad a la larga”; es decir, cuando el número de repeticiones del experimento aleatorio tiende al infinito, la frecuencia relativa con que se repite el suceso simple A se “estabiliza” en el valor verdadero de  $P(A)$ . También se puede expresar así:

$$P(A) = \frac{\text{Número de veces que el suceso A ha ocurrido}}{\text{Cantidad total de ocurrencias}}$$

Bressan (2008) señala que esta visión es una de las aproximaciones más sencillas para la enseñanza elemental.

Limitaciones:

- ⊗ Hay experimentos que se realizan solo una vez.
- ⊗ La frecuencia relativa es una estimación de la probabilidad del suceso porque el experimento aleatorio no se puede repetir de manera indefinida.

Ejemplo:

Marisol apuesta con su hermano que, al lanzar 100 veces una moneda no sesgada, saldrán más caras que sellos, por lo que le ha pedido hacer la prueba y como está segura que ganará, le ha pedido a su hermano que la lleve al cine.

¿Logrará Marisol ir al cine? ¿Qué le puedes aconsejar?

Solución:

Contexto: Personal

Situación de incertidumbre: Verificar el número de veces que sale cara y que sale sello al lanzar 100 veces una moneda al aire.

Desde el contexto:

- ✎ Restricción: Tirar 100 veces una moneda al aire
- ✎ Condición: sacar más caras que sellos

EM = {cara, sello}

### Tabla 3.

*Tabla de frecuencias*

<b>Resultado</b>	<b>Frecuencia absoluta (f)</b>	<b>Frecuencia relativa (h)</b> $h = \frac{f}{n}$ ; n es el número de veces que se repite el experimento
Cara	43	43 veces de 100 = $\frac{43}{100} = 0,43$
Sello	57	57 veces de 100 = $\frac{57}{100} = 0,57$

Marisol no logrará ir al cine, le aconsejo que tire la moneda más veces.

Al tirar la moneda muchas veces, se observará que la probabilidad a posteriori se acerca a la probabilidad a priori, y si se tira una infinidad de veces, ambas probabilidades serán iguales.

### C) Interpretación subjetiva

Esta interpretación se da cuando la situación aleatoria no se puede reproducir bajo las mismas condiciones. La probabilidad desde este punto de vista es el grado de creencia personal de que el suceso ocurra, la misma que se basa en la evidencia disponible, la experiencia, el conocimiento o la información que la persona tenga respecto del suceso cuya probabilidad se quiere encontrar.

Limitación:

- ☞ Carece de fundamentos científicos.

Ejemplo:

La probabilidad de que después de un día soleado en Chosica llueva es de 0,3 por tanto de que no llueva es de 0,7.

“Casi todas las decisiones sociales y administrativas de alto nivel se refieren a situaciones específicas y únicas. Los responsables de tomar decisiones hacen un uso considerable de la probabilidad subjetiva”. (Osorio, 2012, p.39)

Osorio (2012) resume los planteamientos tratados en la siguiente figura:

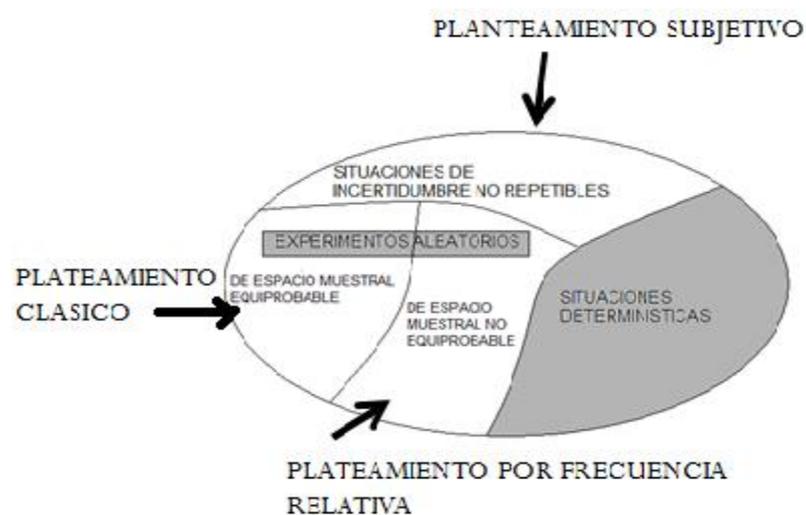


Figura 6. Relación entre los tipos de situaciones aleatorias y los planteamientos para el cálculo de probabilidades

Fuente: Osorio (2012, p.40)

### D) Interpretación axiomática

En Bressan (2008), se señala que este planteamiento es adecuado para la introducción de la probabilidad en el nivel universitario y que sería muy arduo y frustrante tratar de adoptarlo en el nivel elemental. (p.170)

Este punto de vista fue planteado por Andrei N. Kolmogoroff (1903-1987) y define la probabilidad como una función que asocia a cada suceso del espacio muestral un número real  $P(A)$ . También se puede expresar así:

$$f: EM \rightarrow R$$

$$A \rightarrow P(A)$$

Y cumple los siguientes axiomas:

- 1)  $P(A) \geq 0$
- 2)  $P(EM) = 1$
- 3) Si  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son sucesos excluyentes dos a dos, es decir sus intersecciones son vacías, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

Propiedades:

- 1)  $0 \leq P(A) \leq 1$
- 2)  $P(\emptyset) = 0$
- 3)  $P(A \cup \bar{A}) = P(A) \cup P(\bar{A}) = 1$

Para esta definición solo interesa que se cumplan los axiomas sea cual fuere la interpretación que se dé a la probabilidad.

Limitación:

- ✎ Dificultades al conciliar la realidad con la teoría axiomática.

A continuación, presentaremos aspectos importantes sobre el tratamiento de las probabilidades.

### 2.2.4.6 Procedimientos para calcular probabilidades.

#### A. Diagrama de árbol

El diagrama de árbol, que tiene nodos y ramas, es una representación gráfica que facilita la comprensión del experimento aleatorio.

##### 1) Diagrama de árbol para el experimento aleatorio simple

Recordemos el ejemplo propuesto anteriormente:

Caroline necesita sacar el número 5 al lanzar un dado no cargado para ganar el juego. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar el dado, Caroline gane el juego?

Para construir el diagrama del árbol daremos los siguientes pasos:

- Dibujamos al nodo de nivel 1 para representar al primer experimento.
- Según los resultados posibles, dibujamos las ramas y escribimos la probabilidad que corresponde al resultado posible.
- Dibujamos los nodos de nivel 2, que corresponde a cada rama.

Veamos:

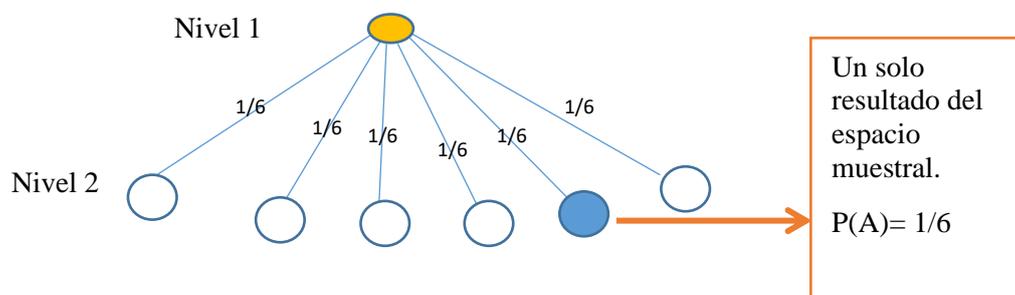


Figura 7. Ejemplo de diagrama de árbol simple

##### 2) Diagrama de árbol para el experimento aleatorio compuesto

Del ejemplo anterior, supongamos que Caroline gana el juego si al lanzar el dado no cargado saca un número par; entonces ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado Caroline gane el juego?

Veamos:

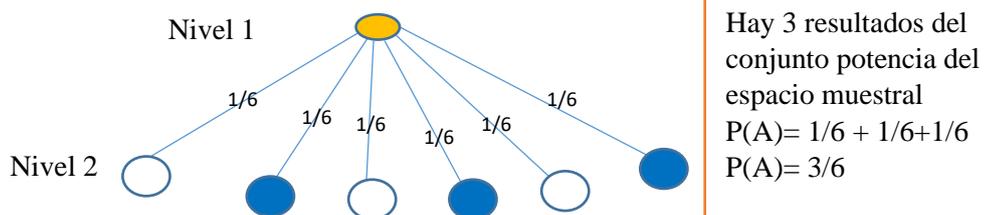


Figura 8. Ejemplo 1 de diagrama de árbol para sucesos compuesto

Otro ejemplo es el siguiente: Mery coloca en dos bolsas oscuras caramelos de fresa y limón de la misma forma y tamaño para jugar con sus hermanos. En la bolsa negra colocó dos caramelos de fresa y tres caramelos de limón, en la bolsa azul colocó cuatro caramelos de fresa y un caramelo de limón. Luego, lanza una moneda no sesgada. Si sale cara, sacará sin ver, un caramelo de la bolsa negra, y si sale sello, extraerá sin ver, un caramelo de la bolsa azul. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un caramelo de limón?

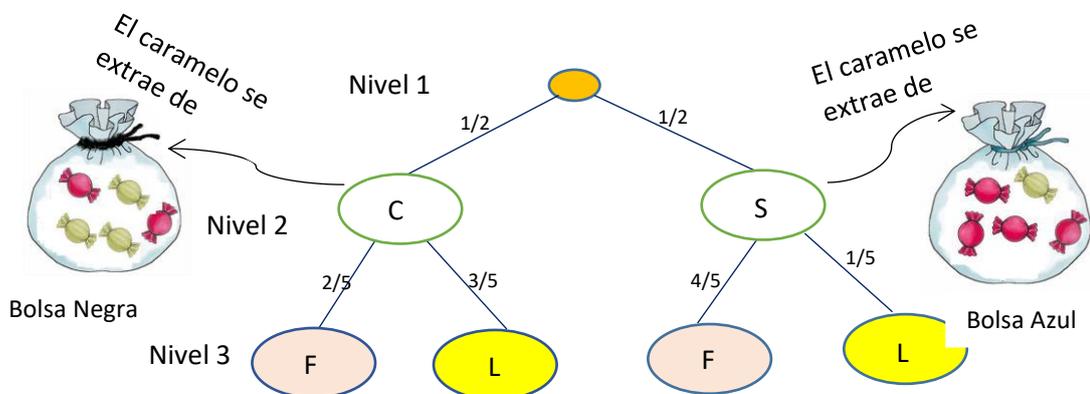


Figura 9. Ejemplo 2 de diagrama de árbol para sucesos compuestos

Del camino uno:  $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$  obtengo caramelos de limón.

Del camino dos:  $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$  obtengo caramelos de limón.

En total:

$$P(L) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$P(L) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}$$

$$P(L) = \frac{4}{10}$$

$$P(L) = 0,4$$

Si el experimento se repitiera  $n$  veces, estaríamos en una interpretación frecuentista; entonces debemos multiplicar por  $n$  en cada camino y, luego, sumar los resultados parciales.

*B. Sucesos mutuamente excluyentes y sucesos no excluyentes*

“Dos sucesos son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir al mismo tiempo; es decir, si la ocurrencia de uno impide la ocurrencia del otro”. (Pagano, 1998, p.162)

Observemos:

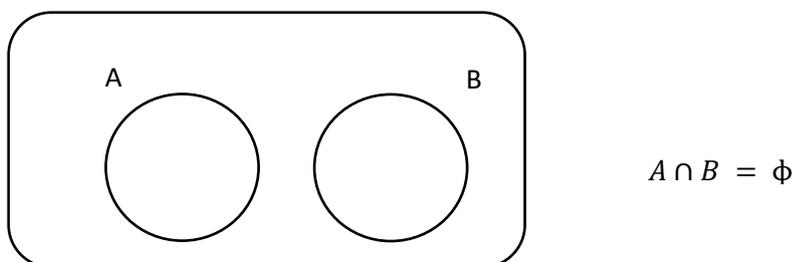


Figura 10. Representación de sucesos mutuamente excluyentes

Ejemplo:

Al lanzar una moneda solo puede salir cara o sello, pero no ambos a la vez; por tanto, estos sucesos son excluyentes o disjuntos.

Por el contrario, dos sucesos son no excluyentes cuando es posible que ocurran ambos; es decir, tienen elementos en común.

Observemos:

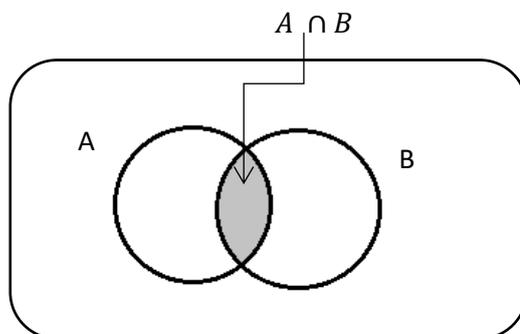


Figura 11. Representación de sucesos mutuamente no excluyentes

Ejemplo:

Al lanzar dos monedas al aire, es posible que salga en cualquiera de ellas una cara. Luego, la probabilidad de que salga cara es  $\frac{3}{4}$ , ya que hay tres maneras de que cumpla con la condición (cc, cs, sc).

### C. Dependencia e independencia de sucesos

- ☞ Dos sucesos A y B son dependientes (sin reemplazo) cuando, “la probabilidad de que ocurra B se ve afectada por la ocurrencia de A”. (Pagano, 1998, p.174).

Es decir:  $P(B|A) \neq P(B)$  o  $P(A|B) \neq P(A)$

Dos o más sucesos serán dependientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia de los otros.

Ejemplo:

Un grupo de cinco estudiantes está eligiendo a su coordinador y un secretario. Para esto han colocado sus nombres, cada uno en papelitos, lo han doblado y lo han introducido en una bolsa oscura. Ahora, sin mirar, sacan el primer papelito, el nombre que resulte será el coordinador. Ahora el papelito, con el nombre del coordinador se desechará; es decir, ya no se volverá a colocar en la bolsa. Enseguida, se saca sin mirar un segundo papelito de los que quedan para saber quién será el secretario. Si en la primera extracción salió, por ejemplo, la estudiante Juana; en la segunda, ya no podrá salir nuevamente, saldrá otro estudiante; por ejemplo, César. Entonces, Juana será la coordinadora y César será el secretario.

- ☞ “Dos eventos son independientes (con reemplazo) si la ocurrencia de un evento no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro”. (Pagano, 1998, p.167)

Es decir:  $P(B|A) = P(B)$  o  $P(A|B) = P(A)$

Dos o más sucesos son independientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de un suceso no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia de los otros.

Ejemplo:

Un grupo de cinco estudiantes está eligiendo a su coordinador y secretario. Para esto han colocado sus nombres, cada uno en papelitos, lo han doblado y lo han introducido en una bolsa oscura. Ahora, sin mirar, sacan el primer papelito; el nombre que resulte será el coordinador. Ahora, el papelito con el nombre del coordinador se introducirá nuevamente en la bolsa. Enseguida, se saca sin mirar el segundo papelito para saber quién será el secretario. Si en la primera extracción salió, por ejemplo, la estudiante Juana, puede ser que en la segunda extracción salga ella misma. Entonces, asumirá dos roles el ser coordinadora y secretaria a la vez.

#### *D. Regla de la adición*

Esta regla nos ayuda a encontrar la probabilidad de que ocurra cualquiera de varios sucesos.

Si dos sucesos A y B tienen elementos en común; es decir, son mutuamente no excluyentes, la probabilidad de ocurrencia de  $A$  o  $B$  se establece mediante la ecuación general:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{o}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Donde:

$P(A \cup B)$ : Probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos sucesos.

$P(A)$ : Probabilidad de ocurrencia del suceso A

$P(B)$ : Probabilidad de ocurrencia del suceso B

$P(A \cap B)$ : Probabilidad de ocurrencia simultánea de los sucesos A y B

Ejemplo:

En el aula de quinto grado hay 25 estudiantes, de los cuales 5 estudiantes han traído en su lonchera solo manzana, 6 solo plátano y 3 estudiantes han traído manzana y plátano; el resto no trajo fruta. ¿Cuántos estudiantes han traído manzana o plátano?

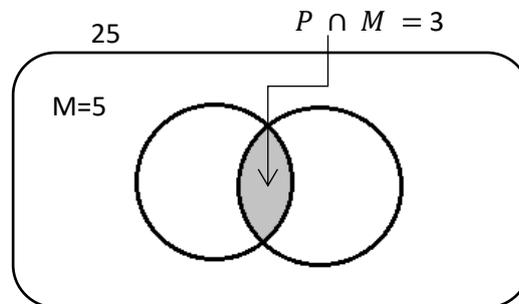


Figura 12. Representación de los datos del problema

$$P(M \cup P) = P(M) + P(P) - P(M \cap P)$$

$$P(M \cup P) = 5 + 6 - 3$$

$$P(M \cup P) = 8$$

Si dos sucesos A y B son disjuntos; es decir, son mutuamente excluyentes, la probabilidad de ocurrencia de A o B se establece mediante la ecuación general:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B); \text{ Siempre que } P(A \cap B) = 0$$

Ejemplo:

En el aula de quinto grado hay 25 estudiantes, de los cuales 5 estudiantes han traído en su lonchera solo manzana, 6 solo plátano, 3 estudiantes han traído dulces, el resto no trajo lonchera. ¿Cuántos estudiantes han traído fruta?

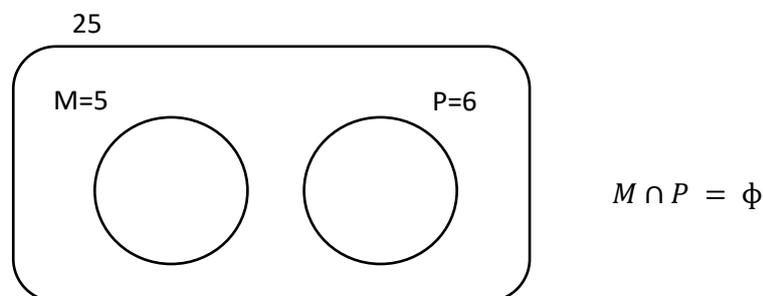


Figura 13. Representación de los datos del problema

$$P(M \text{ o } P) = P(M) + P(P)$$

$$P(M \text{ o } P) = 5+6$$

$$P(M \text{ o } P) = 11$$

Cuando los sucesos son exhaustivos y mutuamente excluyentes, entonces la suma de sus probabilidades es igual a uno. Así:

$$\text{Sean } A, B, C, \dots, Z \text{ los sucesos; } P(A) + P(B) + P(C) + \dots + P(Z) = 1$$

Ejemplo 1:

Al lanzar un dado no cargado al aire, el conjunto de todos los sucesos posibles o espacio muestral es:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Son sucesos exhaustivos y mutuamente excluyentes.

Luego la suma de sus probabilidades individuales se halla así:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{6}{6}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

Ejemplo 2:

Al lanzar una moneda no sesgada al aire, el conjunto de todos los sucesos posibles o espacio muestral es:  $\{\text{cara, sello}\}$ . Son sucesos exhaustivos y mutuamente excluyentes.

Luego la suma de sus probabilidades individuales se halla así:

$$P(\text{cara}) + P(\text{sello}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$P(\text{cara}) + P(\text{sello}) = 1$$

Por una cuestión de costumbre, se asigna  $P$  a la probabilidad de uno de los sucesos; por ejemplo, a la  $P$  (cara) y  $Q$ , en este caso a la  $P$  (sello), y como los sucesos son exhaustivos y mutuamente excluyentes, entonces: (Pagano, 1998).

$$P + Q = 1$$

Como se puede ver,  $Q$  es el complemento de  $P$ .

### E. Probabilidad condicional

Se da para sucesos dependientes.

“Si  $B$  es un suceso cualquiera con  $P(B) \neq 0$ . La probabilidad de que un suceso  $A$  ocurra cuando  $B$  ha ocurrido se denomina “probabilidad condicionada de  $A$  dado  $B$ ”;

se representa  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  (Rico, 2016, p.445).

También,  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ ; con  $P(A) \neq 0$

Donde:

El símbolo  $|$  se lee: dado, y expresa condición.

Observemos la gráfica:

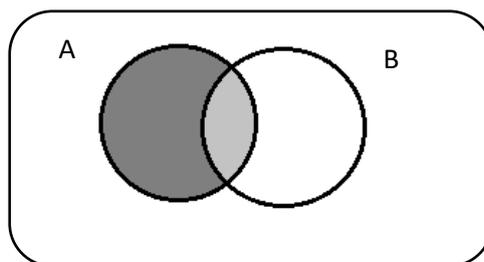


Figura 14. Representación de la probabilidad condicionada.

Notemos que el suceso  $B$  está condicionado a que ocurra el suceso  $A$ , por ello el espacio muestral o casos posibles queda reducido a  $A$ . Los casos favorables para que ocurra  $B$  son los que aparecen en  $A \cap B$ .

$$\text{Así: } P(B|A) = \frac{P(\text{Casos favorables de ocurrencia de } A \text{ y } B)}{P(\text{Casos posibles de ocurrencia de } A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo:

En una escuela de 800 estudiantes se llevó a cabo una encuesta para determinar si los desayunos que son entregados gratuitamente por el comedor de la comunidad es consumida por los estudiantes que son de bajos recursos.

Los resultados se dieron así: 400 estudiantes son de bajos recursos, 250 consumen el desayuno brindado por el comedor y 100 estudiantes que son de bajos recursos consumen los desayunos. Si se selecciona un estudiante al azar de la escuela, ¿cuál es la probabilidad de que consuma el desayuno del comedor, dado que posee bajos recursos?

Resolución:

A: estudiantes de bajos recursos.

B: estudiantes que consumen los desayunos donados.

$B \cap A$ : estudiantes que consumen los desayunos donados y de bajos recursos.

Observemos la gráfica:

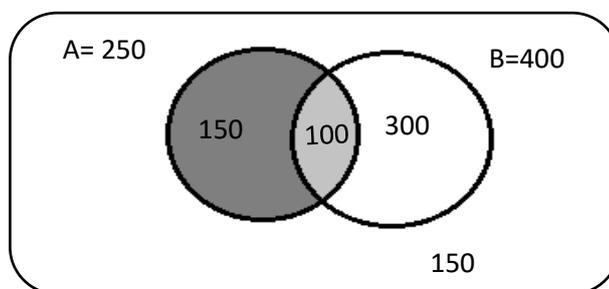


Figura 15. Representación de los datos del problema

$$A = 250, \text{ luego } P(A) = \frac{250}{800}, \text{ de donde } P(A) = 0,3125$$

$$B \cap A = 100, \text{ luego } P(B \cap A) = \frac{100}{800}, \text{ de donde } P(B \cap A) = 0,125$$

$$\text{Ahora: } P(B \setminus A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B \setminus A) = \frac{0,125}{0,3125}$$

$$P(B \setminus A) = 0,4$$

La probabilidad de seleccionar un estudiante que consuma el desayuno del comedor, dado que posee bajos recursos es de 40%.

### F. Regla de la multiplicación

Esta regla nos ayuda a encontrar la probabilidad cuando ocurren simultáneamente varios sucesos.

Hay tres condiciones que hay que tener en cuenta para aplicar esta regla:

1. Cuando los sucesos son mutuamente excluyentes.
2. Cuando los sucesos son dependientes.
3. Cuando los sucesos son independientes.

Veamos:

1. Ecuación general de la regla de multiplicación cuando los sucesos son mutuamente excluyentes.  $P(A \cap B) = 0$

2. Ecuación general de la regla de multiplicación cuando los sucesos son dependientes (sin reemplazo).

☞ Dados dos sucesos dependientes A y B, se tiene:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B|A) \quad \text{o} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Donde:

$P(A \cap B)$ : Probabilidad de que ocurra ambos sucesos simultáneamente.

$P(A)$ : Probabilidad de ocurrencia del suceso A.

$P(B|A)$ : Probabilidad de que B ocurra, dado que A ha ocurrido.

Ejemplo 1:

El muestreo sin reemplazo.

Ejemplo 2:

En una escuela se encontró que la probabilidad de que se incremente las propinas a los estudiantes es de 60%; de que se incremente el consumo de golosinas es de 40%; de

que se incremente el consumo de golosinas dado el incremento de propinas, es de 30%.

¿Cuál es la probabilidad de que se incremente las propinas y el consumo de golosinas?

**Tabla 4.**

*Datos de sucesos y probabilidades*

Sucesos	Probabilidades
A: Incremento de propinas.	$P(A) = 0,60$
B: Incremento del consumo de golosinas.	$P(B) = 0,40$
B\A: Incremento del consumo de golosinas dado que se incrementa las propinas.	$P(B\A) = 0,30$

Vemos que, el consumo de golosinas depende del aumento en las propinas. Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B\A)$$

$$P(A \cap B) = 0,60 \times 0,30$$

$$P(A \cap B) = 0,18$$

La probabilidad de que se incremente las propinas y el consumo de golosinas es de 18%.

☞ Dados A, B, C, ..., Z sucesos dependientes, se tiene:

$$P(A \cap B \cap C \cap \dots \cap Z) = P(A) \times P(B\A) \times P(C\AB) \times \dots \times P(Z\ABC \dots)$$

Donde:

$P(A)$ : Probabilidad de A.

$P(B\A)$ : Probabilidad de B dado que A ha ocurrido.

$P(C\AB)$ : Probabilidad de C dado que A y B han ocurrido.

$P(Z\ABC \dots)$ : Probabilidad de Z dado que A, B, C y todos los demás sucesos han ocurrido. (Pagano, 1998, p.177).

Ejemplo:

En la facultad de ciencias de una universidad se tienen 60 estudiantes de informática y 50 estudiantes de matemática. Se desea hacer un muestreo sin reemplazo y de un estudiante a la vez para un estudio. Si se quiere extraer 4 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que estos estudiantes sean de informática?

Resolución:

A: Representa obtener un estudiante en la primera extracción.

B: Representa obtener un estudiante en la segunda extracción.

C: Representa obtener un estudiante en la tercera extracción.

D: Representa obtener un estudiante en la cuarta extracción.

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \times P(B \setminus A) \times P(C \setminus AB) \times P(D \setminus ABC)$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{60}{110} \times \frac{59}{109} \times \frac{58}{108} \times \frac{57}{107}$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{11\,703\,240}{138\,556\,440}$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = 0,084$$

La probabilidad de que estos estudiantes sean de informática es de 8,4%.

3. Ecuación general de la regla de multiplicación cuando los sucesos son independientes (con reemplazo).

☞ Dados dos sucesos A y B independientes; es decir, la probabilidad de B no es afectada por A. Luego,  $P(B \setminus A) = P(B)$ ; entonces:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B) \quad \text{o} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Ejemplo 1:

El muestreo con reemplazo.

## Ejemplo 2:

En el aula de sexto grado la probabilidad de que un estudiante sea mayor de 10 años de edad es de 60%, la probabilidad de que un estudiante consuma frutas es de 20% y la probabilidad de que consuma fruta, dado que es mayor de 10 años, es de 20%. Si seleccionamos un estudiante al azar de esta aula, ¿cuál es la probabilidad de que consuma frutas y tenga más de 10 años?

**Tabla 5.**

*Datos de sucesos y probabilidades*

Sucesos	Probabilidades
A: Estudiante mayor de 10 años de edad.	$P(A) = 0,60$
B: Consumo de fruta.	$P(B) = 0,20$
B\A: Consumo de fruta dado que es mayor de 10 años.	$P(B\A) = 0,20$

Vemos que el consumo de frutas de un estudiante no depende de su edad.  $P(B\A) = P(B)$

Luego:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0,60 \times 0,20$$

$$P(A \cap B) = 0,12$$

La probabilidad de que un estudiante consuma fruta y sea mayor de 10 años es de 12%.

☞ Dados A, B, C, ..., Z sucesos independientes, se tiene:

$$P(A \cap B \cap C \cap \dots \cap Z) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times \dots \times P(Z)$$

Ejemplo:

En la facultad de ciencias de una universidad, se tienen 60 estudiantes de informática y 50 estudiantes de matemática. Se desea hacer un muestreo con reemplazo y de un

estudiante a la vez para un estudio. Si se quiere extraer 4 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 estudiantes de matemática y un estudiante de informática, en ese mismo orden?

Resolución:

A: Representa obtener un estudiante de matemática en la primera extracción.

B: Representa obtener un estudiante de matemática en la segunda extracción.

C: Representa obtener un estudiante de matemática en la tercera extracción.

D: Representa obtener un estudiante de informática en la cuarta extracción.

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times P(D)$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{50}{110} \times \frac{50}{110} \times \frac{50}{110} \times \frac{60}{110}$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{7\,500\,000}{146\,410\,000}$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = 0,051$$

La probabilidad de que tres estudiantes sean de matemática y uno se de informática, en ese orden, es de 5,1%.

En todos los casos vistos anteriormente se ha calculado la probabilidad de sucesos teniendo en cuenta lo siguiente:

- Se conoce las causas del suceso.
- Se conoce las condiciones del experimento.
- Se desconoce el efecto.

#### G. Permutación y combinatoria

- ⊗ La permutación se utiliza para determinar el número posible de arreglos de K objetos cuando solo hay un grupo de n objetos.

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- ⊗ Cuando todos los elementos están dispuestos en una línea cerrada, se fija la posición de un elemento, los (n-1) elementos restantes pueden cambiar de lugar

de  $(n-1)$  maneras diferentes con respecto al primer elemento fijado, la permutación es circular y se calcula:  $P(n, r) = (n - 1)!$

- ⊗ Las permutaciones sin repetición son lineales y participan todos los elementos.

Así:  $P_n = n!$

- ⊗ Las permutaciones con repetición se dan cuando cada elemento interviene todas las veces que se realice una selección. Veamos:  $Pn, r = n^r$

- ⊗ Las permutaciones con elementos repetidos se calculan:

$$P_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

- ⊗ Una selección es una combinación cuando no interesa el orden en que se seleccionan los objetos. Para contar el número de combinaciones de  $k$  objetos de un conjunto de  $n$  objetos, se aplica:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ejemplo:

Ana desea seleccionar tres prendas de vestir de un total de cinco prendas, ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

$$C_3^5 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$$

$$C_3^5 = 10$$

#### ***2.2.4.7 Las ideas estocásticas fundamentales.***

Batanero (2015) parte de los trabajos de Heitele para señalar que estas ideas se pueden presentar a los estudiantes con modelos sencillos que explican los fenómenos de azar que observa, y que se puede ir complejizando según la etapa de su desarrollo. Señala también que los modelos intuitivos explicatorios deben ayudar al niño a entender su

entorno y prepararlo para comprender los conocimientos estocásticos posteriores de manera analítica. Por ello, recomienda trabajar con los niños las ideas estocásticas fundamentales con experimentos y juegos organizados de manera creciente en complejidad. Veamos a continuación estas ideas estocásticas fundamentales:

*A. La probabilidad como normalización de nuestras creencias.*

Dado que la probabilidad puede ser interpretada desde diversos puntos de vista, es un imperativo asignar números a los sucesos aleatorios que reflejen el grado de creencia. Ya que hay expresiones imprecisas como: “casi cierto”, “posible “y otros, donde las personas le pueden dar valores diferentes, es por ello que para normalizarlas se le asigna un valor desde 0 (suceso imposible) hasta 1 (suceso seguro) en la escala de la probabilidad, la cual nos permite operar matemáticamente con estos números e idear modelos para comprender y predecir la realidad.

La probabilidad puede presentarse a los niños desde la escuela primaria. Por ejemplo, el profesor podría pedir a los niños que elaboren una lista de sucesos que podrían ocurrir (o no) durante el mes en curso. Luego, individualmente o en grupo los niños podrían asignar un valor de probabilidad a cada uno de estos sucesos, representándolos a lo largo de una escala numérica entre cero y uno en base a su grado de creencia. El profesor podría pedir a los niños para revisar las probabilidades iniciales, al cabo de una semana, indicando las posibles informaciones que han influido en los cambios de asignación de probabilidades. (Batanero, 2015, p.14).

*B. El conjunto de todas las posibilidades.*

Al realizar un experimento aleatorio ocurren sucesos que podemos observar y sucesos que podrían ocurrir. A todos estos sucesos posibles los llamamos espacio muestral o conjunto de referencia.

Según Batanero (2015), la propiedad: *si un subconjunto está incluido en un conjunto mayor, la probabilidad del primero es menor que la del segundo*. Se puede trabajar con los niños del nivel primaria a través de actividades de comparar probabilidades aún sin cuantificarlas, como por ejemplo: ordenar los sucesos “obtener un 2” y “obtener un número par” al lanzar un dado.

Fischbein (1975), citado en Batanero (2015), manifiesta que los niños y algunos adultos ven la realidad con cierto determinismo, por lo que se concentran en un sólo suceso y no en la totalidad cuando razonan sobre los sucesos aleatorios y tratan de predecir cuál es el suceso que ocurrirá, en lugar de calcular la probabilidad pedida. Asimismo, Batanero (2015) nos dice que no siempre la probabilidad sigue las reglas matemáticas; por ejemplo, la relación de orden que se establece entre los sucesos de un único experimento no siempre se conserva al considerar un experimento compuesto. Señala que la enseñanza de la idea de espacio muestral es muy elemental y no se le dedica mucho tiempo. A ello, Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1999), citado en batanero (2015), señalan que la comprensión correcta del espacio muestral es clave para ayudar al alumno a progresar en el aprendizaje de la probabilidad y se debe dedicar un tiempo suficiente a su enseñanza.

### *C. Equidistribución y simetría.*

Según Batanero (2015), se debe trabajar esta idea: ninguno de los resultados posibles tiene mayor ventaja que el resto y la igualdad de probabilidad (equidistribución) a partir de ejemplos, utilizando diversos materiales simétricos y no simétricos, rompiendo las creencias que algunos resultados son más fáciles que otros, para luego trabajar con facilidad el cálculo de las probabilidades de los sucesos elementales en espacios muestrales finitos; simplemente dividiendo la probabilidad 1 entre el número de sucesos.

*D. Regla de adición de probabilidades.*

El cálculo de la probabilidad de un suceso compuesto se puede hacer a partir del cálculo de las probabilidades de sus sucesos simples que la conforman, o calcular la probabilidad del suceso contrario al dado. Según Batanero (2015), los estudiantes deben comprender esta regla para el caso finito para más adelante generalizarlo a conjuntos infinitos. Así, “la regla de la suma puede aprenderse a diversos niveles de profundidad y el aprendizaje temprano para casos finitos prepara la comprensión del caso general” (Batanero 2015, p. 19).

*E. Independencia y regla del producto.*

Esta idea se puede trabajar en los niños; por ejemplo, al lanzar dos monedas y con el diagrama del árbol construir el espacio muestral producto, trabajando así el experimento compuesto.

*F. Probabilidad condicional.*

Según Batanero (2015), esta idea formaliza el cambio de nuestro grado de creencia con la nueva información. Así, la probabilidad no siempre se asigna en ausencia de información, sino que tenemos conocimientos sobre los sucesos implicados que podemos utilizar para mejorar nuestra asignación. Por ejemplo, cuando un médico establece el diagnóstico de un enfermo, no sólo valora las probabilidades de incidencia de diversas posibles enfermedades que puedan corresponder a la misma patología en la población general, también tendrá en cuenta la edad y género del paciente y su historial de enfermedades previas. Ejemplos similares aparecen en muchos contextos cotidianos, desde el pronóstico del tiempo, resultados de partidos o votaciones, calificaciones en exámenes, veredictos en juicios, etc. (p.20).

### *G. Independencia.*

El trabajo intuitivo de esta idea parte de la independencia de sucesos de un mismo experimento a partir del uso de la regla del producto con el diagrama del árbol. Luego, se complejizará cuando A y B son sucesos de distintos experimentos. Se puede hacer ver la dificultad intuitiva de la idea de independencia; por ejemplo, cuando un matrimonio que ya ha tenido tres hijos varones espera su cuarto hijo, puede ocurrir que piense que la probabilidad de tener ahora una niña es mucho mayor que la primera vez o bien que, por el contrario, esté convencido de que, bien el marido, bien la mujer, tiene tendencia natural a tener hijos de un único género. El hecho de que las personas se abonen a un mismo número de lotería y jueguen a él todos los años o de que cada año se traten de inventar nuevos métodos de descubrir “patrones” en la ruleta u otros juegos de azar. (Batanero 2015, p. 21-22).

### *H. Combinatoria.*

El trabajo de esta idea fundamental se puede hacer usando el diagrama del árbol, pues, como menciona Batanero (2015), el diagrama del árbol es una representación icónica fundamental para el caso, porque visualiza la estructura multi-paso del experimento compuesto y al mismo tiempo visualiza la técnica de producción de las configuraciones combinatorias y proporcionan una interpretación clara de la estructura interior de los experimentos y el encadenamiento de sucesivos experimentos en un complejo mayor. Así, la combinatoria es algo más que un auxiliar de la probabilidad y significan más que simples cálculos de probabilidades en espacios probabilísticos complejos. (p.22)

### *I. La Variable aleatoria.*

Desde el punto de vista elemental, manejamos intuitivamente la idea de variable aleatoria cuando nos encontramos con juegos y experimentos en los que usamos dados, monedas, en los cuales nos interesamos por el número de puntos a conseguir. Asimismo,

tenemos experiencias cotidianas con variables aleatorias continuas, como el tiempo de espera del autobús, o el necesario para llegar de nuestra casa al trabajo, nuestro peso un día dado, la temperatura ambiente, etc. El refuerzo de todas estas experiencias, incluso inconscientes, hace aparecer la intuición de la variable aleatoria y su valor esperado a una edad temprana.

Algunos psicólogos sostienen que la habilidad para estimar la esperanza matemática de las variables aleatorias es puramente biológica; mediante la experiencia llegamos a estimar el tiempo medio que tardaremos en preparar la comida o arreglarnos, o lo que gastaremos en promedio al hacer la compra. En un plano formal, la esperanza matemática se interpreta como la media aritmética de los valores de una variable aleatoria, si el experimento se repitiese suficientemente en idénticas condiciones. (Batanero 2015, p. 23-24).

*J. Las leyes de los grandes números.*

...es deseable y posible introducir a los alumnos de estas edades algunas nociones intuitivas sobre la convergencia empírica. Esta es observable en la realidad; por ejemplo, al observar las gotas de lluvia sobre un pavimento, o la proporción de recién nacidos varones en un hospital a lo largo del año y también visualizable fácilmente usando la simulación con ordenador. Es filosóficamente interesante que una regularidad global surja de la variabilidad local, que parece inherente al curso de la naturaleza. Esta convergencia empírica hace que las correspondientes leyes matemáticas de los grandes números se justifiquen como un buen modelo para los fenómenos aleatorios, aunque no contesta la pregunta de si es posible que los alumnos sean capaces de diferenciar entre el modelo matemático y la realidad observable, ya que de hecho vemos que con frecuencia se espera una convergencia empírica demasiado rápida o demasiado exacta. (Batanero 2015, p. 25).

### *K. Muestreo.*

Según Batanero (2015), la muestra genera un enlace entre la estadística y probabilidad y nos introduce a la inferencia. Esta tiene dos características: representatividad y variabilidad. La representatividad nos indica que la muestra se parece a la población, pero la variabilidad indica que una muestra puede ser diferente de otra, por lo que se debe ser cauto y crítico para enjuiciar, pensar e inferir con base a una muestra. Así, la representatividad es percibida en forma intuitiva por la mayoría de las personas, pero la variabilidad pasa desapercibida o es minimizada y tenemos una tendencia a buscar patrones deterministas en los datos aleatorios.

Todo nuestro conocimiento y juicios sobre el mundo o las personas están basados en el muestreo, ya que, usualmente, sólo podemos estudiar u observar una parcela de la realidad en la que estamos interesados. El conocimiento científico en cualquier área de la ciencia se adquiere a partir de las experiencias empíricas y éstas son siempre limitadas, por lo que las conclusiones deben ser más amplias que los datos que obtenemos en las observaciones.

Los resultados obtenidos mediante muestreo en encuestas o estudios relacionados con nuestros intereses (medicina, política, educación, consumo, etc.) se publican cada vez con mayor frecuencia en los medios de comunicación y a veces se presentan en forma sesgada para atraer la opinión pública hacia ciertas ideas, productos comerciales o decisiones. En un número creciente de profesiones, los datos de muestras estadísticas son utilizados como base para la toma de decisiones. Señala por ello que es importante educar a los alumnos en el razonamiento estadístico, que parte de las muestras y las analiza tanto en los datos que contiene como en la forma y condiciones en que fueron recogidas, y deduce las posibilidades que la muestra tiene como modelo para explicar la realidad. El alumno ha de adquirir también la capacidad de entender la naturaleza estadística de sus

conclusiones, en cada caso particular, y las consecuencias de una decisión equivocada. (p.25 – 26).

#### *L. Simulación*

Mediante la simulación ponemos en correspondencia dos experimentos aleatorios diferentes, con la condición que a cada suceso elemental del primer experimento le corresponda un suceso elemental del segundo y sólo uno, de forma que los sucesos puestos en correspondencia en ambos experimentos sean equiprobables. Como indica Girard (1997), al trabajar mediante simulación estamos ya modelizando, porque debemos no sólo simplificar la realidad, sino fijar los aspectos de la misma que queremos simular y especificar unas hipótesis matemáticas sobre el fenómeno estudiado.

Por ejemplo, podemos “simular” el experimento aleatorio consistente en observar el sexo de un recién nacido mediante el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda al aire. Ahora bien, son muchos los aspectos que podríamos estudiar sobre un recién nacido, como el grupo sanguíneo, su peso o el diámetro de su tórax, que no podrían simularse con el lanzamiento de la moneda. También hacemos una hipótesis (matemática) sobre equiprobabilidad para los dos sexos, independientemente de la raza, país de nacimiento y antecedentes familiares. Sólo una vez que hemos hecho estos supuestos, podremos comenzar el trabajo con la simulación. Lo importante de la simulación es que podemos operar y observar resultados del segundo experimento y utilizarlos para obtener información del primero.

... la urna con bolas de colores (fichas, tarjetas) es un “material universal”, válido para estudiar cualquier problema o concepto probabilístico. Por ello la simulación proporciona un método “universal” para obtener una estimación de la solución de los problemas probabilísticos, que no tiene paralelo en otras ramas de la matemática. (Batanero 2015, p. 27-28).

### 2.3 Definición de Categorías de análisis

El **Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB)** dado por el Ministerio de Educación (2016), está estructurado con base en cuatro definiciones curriculares clave que permiten concretar en la práctica educativa las intenciones que se expresan en el Perfil de egreso. Estas definiciones son: competencias, capacidades, estándares de aprendizaje y desempeño.

A continuación, se presenta una tabla con cada una de ellas según el CNEB:

**Tabla 6.**

#### *Competencias y capacidades matemáticas*

<b>Competencia</b>	<b>Capacidad</b>
Resuelve problemas de cantidad.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Traduce cantidades a expresiones numéricas.</li> <li>- Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.</li> <li>- Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.</li> <li>- Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.</li> </ul>
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas.</li> <li>- Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>- Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.</li> <li>- Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.</li> <li>- Comunica la comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.</li> <li>- Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.</li> <li>- Sustenta conclusiones o decisiones basado en información obtenida.</li> </ul>
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.</li> <li>- Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.</li> <li>- Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio.</li> <li>- Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.</li> </ul>

#### **Competencia.**

La competencia se define en el CNEB, (MNEDU, 2016), como la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades a fin de lograr un propósito

específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético.

Ser competente significa identificar los conocimientos, habilidades, habilidades socioemocionales que uno posee o que están disponibles; analizar las combinaciones más pertinentes a la situación y al propósito, para luego tomar decisiones; y ejecutar o poner en acción la combinación seleccionada que hagan más eficaz su interacción con otros.

El desarrollo de las competencias de los estudiantes permite el logro del Perfil de egreso y es una construcción constante, deliberada y consciente, propiciada por los docentes y las instituciones y programas educativos. Este desarrollo se da a lo largo de la vida y tiene niveles esperados en cada ciclo de la escolaridad.

### **Capacidades.**

Según el CNEB, (MNEDU, 2016), las capacidades son recursos para actuar de manera competente. Estos recursos son los conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes utilizan para afrontar una situación determinada. Estas capacidades suponen operaciones menores implicadas en las competencias, que son operaciones más complejas.

Los conocimientos son las teorías, conceptos y procedimientos legados por la humanidad en distintos campos del saber. La escuela trabaja con conocimientos contruidos y validados por la sociedad global y por la sociedad en la que están insertos.

De la misma forma, los estudiantes también construyen conocimientos. De ahí que el aprendizaje es un proceso vivo, alejado de la repetición mecánica y memorística de los conocimientos preestablecidos.

Las habilidades hacen referencia al talento, la pericia o la aptitud de una persona para desarrollar alguna tarea con éxito. Las habilidades pueden ser sociales, cognitivas, motoras.

Las actitudes son disposiciones o tendencias para actuar de acuerdo o en desacuerdo a una situación específica. Son formas habituales de pensar, sentir y comportarse de acuerdo a un sistema de valores que se va configurando a lo largo de la vida a través de las experiencias y educación recibida.

Es importante considerar que la adquisición, por separado de las capacidades de una competencia, no supone el desarrollo de la competencia. Ser competente es más que demostrar el logro de cada capacidad por separado: es usar las capacidades combinadamente y ante situaciones nuevas.

### **Estándares de aprendizaje.**

Según el CNEB, (MNEDU, 2016), son descripciones del desarrollo de la competencia en niveles de creciente complejidad, desde el inicio hasta el fin de la Educación Básica, de acuerdo a la secuencia que sigue la mayoría de estudiantes que progresan en una competencia determinada. Estas descripciones son holísticas, porque hacen referencia de manera articulada a las capacidades que se ponen en acción al resolver o enfrentar situaciones auténticas.

Estas descripciones definen el nivel que se espera puedan alcanzar todos los estudiantes al finalizar los ciclos de la Educación Básica y son referentes para la evaluación de los aprendizajes tanto a nivel de aula como a nivel de sistema (evaluaciones nacionales, muestrales o censales) y para la programación de actividades que permitan demostrar y desarrollar competencias. En el sistema educativo peruano, los estándares de aprendizaje se constituyen en un referente para articular la formación docente y la elaboración de materiales educativos a los niveles de desarrollo de la competencia que exige el Currículo.

**Desempeños.**

Según el CNEB, (MNEDU, 2016), son descripciones específicas de lo que hacen los estudiantes respecto a los niveles de desarrollo de las competencias (estándares de aprendizaje). Son observables en una diversidad de situaciones o contextos. No tienen carácter exhaustivo, más bien ilustran actuaciones que los estudiantes demuestran cuando están en proceso de alcanzar el nivel esperado de la competencia o cuando han logrado este nivel.

Los desempeños se presentan en los programas curriculares de los niveles o modalidades, por edades (en el nivel inicial) o grados (en las otras modalidades y niveles de la Educación Básica) para ayudar a los docentes en la planificación y evaluación, reconociendo que dentro de un grupo de estudiantes hay una diversidad de niveles de desempeño, que pueden estar por encima o por debajo del estándar, lo cual le otorga flexibilidad.

**La competencia resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.**

La alfabetización y la investigación escolar en la gestión de datos e incertidumbre son indispensables en nuestro país para que contemos con ciudadanos capaces de “investigar” y argumentar con un pensamiento crítico y tomar decisiones en la sociedad de la información en la que vivimos. Es por ello que el Currículo Nacional de Educación Básica plantea la competencia. “Resuelve problemas de Gestión de Datos e Incertidumbre” para la educación básica.

Así, en el Programa Curricular de educación Primaria, se expresa que la competencia consiste, en que el estudiante analice datos sobre un tema de interés o estudio o de situaciones aleatorias, que le permitan tomar decisiones, elaborar predicciones razonables y conclusiones respaldadas en la información producida. Para ello, el estudiante recopila, organiza y representa datos que le dan insumos para el análisis, interpretación e inferencia

del comportamiento determinista o aleatorio de la situación usando medidas estadísticas y probabilísticas.

Esta competencia implica la combinación de las siguientes capacidades:

***Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas:*** es representar el comportamiento de un conjunto de datos, seleccionando tablas o gráficos estadísticos, medidas de tendencia central, de localización o dispersión. Reconocer variables de la población o la muestra al plantear un tema de estudio. Así, también, implica el análisis de situaciones aleatorias y representar la ocurrencia de sucesos mediante el valor de la probabilidad.

***Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos:*** es comunicar su comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en relación a la situación. Leer, describir e interpretar información estadística contenida en gráficos o tablas provenientes de diferentes fuentes.

***Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos:*** es seleccionar, adaptar, combinar o crear una variedad de procedimientos, estrategias y recursos para recopilar, procesar y analizar datos, así como el uso de técnicas de muestreo y el cálculo de las medidas estadísticas y probabilísticas.

***Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida:*** es tomar decisiones, hacer predicciones o elaborar conclusiones y sustentarlas con base en la información obtenida del procesamiento y análisis de datos, así como de la revisión o valoración de los procesos. (MNEDU, 2016, p.263).

**Tabla 7.**

*Estándares de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre”<sup>1</sup>*

Niveles	Descripción de los niveles del desarrollo de la competencia
<b>D</b>	Resuelve problemas referidos a situaciones aleatorias y situaciones referidas a caracterizar una población basado en una muestra representativa. Emplea técnicas de muestreo estratificado y recolecta datos, usando diversas estrategias y procedimientos; determina el quintil. Representa el comportamiento de los datos usando gráficos y tablas pertinentes, estadísticos, relaciones entre medidas de tendencia central y el coeficiente de variación, identificando lo más óptimo. Interpreta la información sobre el comportamiento de los datos y la probabilidad condicional. Contrasta conclusiones sobre la relación entre variables.
7	Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, caracterizando la población y la muestra e identificando las variables a estudiar; empleando el muestreo aleatorio para determinar una muestra representativa. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas, determina terciles, cuartiles y quintiles; la desviación estándar, y el rango de un conjunto de datos; representa el comportamiento de estos usando gráficos y medidas estadísticas más apropiadas a las variables en estudio. Interpreta la información contenida en estos, o la información relacionada a su tema de estudio proveniente de diversas fuentes, haciendo uso del significado de la desviación estándar, las medidas de localización estudiadas y el lenguaje estadístico; basado en esto contrasta y justifica conclusiones sobre las características de la población. Expresa la ocurrencia de sucesos dependientes, independientes, simples o compuestos de una situación aleatoria mediante la probabilidad, y determina su espacio muestral; interpreta las propiedades básicas de la probabilidad de acuerdo a las condiciones de la situación; justifica sus predicciones con base a los resultados de su experimento o propiedades.
6	Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, identificando la población pertinente y las variables cuantitativas continuas, así como cualitativas nominales y ordinales. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas de datos agrupados, así también determina la media aritmética y mediana de datos discretos; representa su comportamiento en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos circulares, tablas de frecuencia y medidas de tendencia central; usa el significado de las medidas de tendencia central para interpretar y comparar la información contenida en estos. Basado en ello, plantea y contrasta conclusiones, sobre las características de una población. Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica.
5	Resuelve problemas relacionados con temas de estudio, en los que reconoce variables cualitativas o cuantitativas discretas, recolecta datos a través de encuestas y de diversas fuentes de información. Selecciona tablas de doble entrada, gráficos de barras dobles y gráficos de líneas, seleccionando el más adecuado para representar los datos. Usa el significado de la moda para interpretar información contenida en gráficos y en diversas fuentes de información. Realiza experimentos

<sup>1</sup> Según el Currículo Nacional de la Educación Básica aprobado en junio de 2016 mediante la Resolución Ministerial N.º 281-2016 y su modificatoria mediante la Resolución Ministerial N.º 159-2017.

---

	aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Elabora y justifica predicciones, decisiones y conclusiones, basándose en la información obtenida en el análisis de datos o en la probabilidad de un evento.
4	Resuelve problemas relacionados con datos cualitativos o cuantitativos (discretos) sobre un tema de estudio, recolecta datos a través de encuestas y entrevistas sencillas, registra en tablas de frecuencia simples y los representa en pictogramas, gráficos de barra simple con escala (múltiplos de diez). Interpreta información contenida en gráficos de barras simples y dobles y tablas de doble entrada, comparando frecuencias y usando el significado de la moda de un conjunto de datos; a partir de esta información elabora algunas conclusiones y toma decisiones. Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable y justifica su respuesta.
3	Resuelve problemas relacionados con datos cualitativos en situaciones de su interés, recolecta datos a través de preguntas sencillas, los registra en listas o tablas de conteo simple (frecuencia) y los organiza en pictogramas horizontales y gráficos de barras simples. Lee la información contenida en estas tablas o gráficos identificando el dato o datos que tuvieron mayor o menor frecuencia y explica sus decisiones basándose en la información producida. Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de posible o imposible y justifica su respuesta.
2	No aplica
1	No aplica

---

### **Desempeños de la competencia resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre para el V ciclo.**

Según el Programa Curricular de Primaria dado por el Ministerio de Educación, los desempeños para esta competencia en el quinto ciclo son:

#### **Tabla 8.**

##### *Estándar y desempeños del V ciclo*

---

Descripción del nivel de la competencia esperado al final del ciclo V	
Resuelve problemas relacionados con temas de estudio, en los que reconoce variables cualitativas o cuantitativas discretas, recolecta datos a través de encuestas y de diversas fuentes de información. Selecciona tablas de doble entrada, gráficos de barras dobles y gráficos de líneas, seleccionando el más adecuado para representar los datos. Usa el significado de la moda para interpretar información contenida en gráficos y en diversas fuentes de información. Realiza experimentos aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Elabora y justifica predicciones, decisiones y conclusiones, basándose en la información obtenida en el análisis de datos o en la probabilidad de un evento.	
Desempeños de quinto grado	Desempeños de sexto grado
Cuando el estudiante resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre y se encuentra en proceso hacia el nivel esperado del ciclo V, realiza desempeños como los siguientes:	Cuando el estudiante resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre y logra el nivel

---

- 
- Representa las características de una población en estudio, las que asocia a variables cualitativas (por ejemplo, color de ojos: pardos, negros; profesión: médico, abogado, etc.) y cuantitativas discretas (por ejemplo, número de hermanos: 3, 2; cantidad de goles: 2, 4, 5, etc.), así como también el comportamiento del conjunto de datos, a través de pictogramas verticales y horizontales (cada símbolo representa más de una unidad), gráficos de barras con escala dada (múltiplos de 10), la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como punto de equilibrio.
  - Expresa su comprensión de la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como punto de equilibrio; así como todos los posibles resultados de la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones “seguro”, “más probable” y “menos probable”.
  - Lee gráficos de barras con escala, tablas de doble entrada y pictogramas de frecuencias con equivalencias, para interpretar la información del mismo conjunto de datos contenidos en diferentes formas de representación y de la situación estudiada.
  - Recopila datos mediante encuestas sencillas o entrevistas cortas con preguntas adecuadas empleando procedimientos y recursos; los procesa y organiza en listas de datos, tablas de doble entrada o tablas de frecuencia, para describirlos y analizarlos.
  - Selecciona y emplea procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, las tablas de frecuencia u otros, para determinar la media aritmética como punto de equilibrio, la moda como la mayor frecuencia y todos los posibles resultados de la ocurrencia de sucesos cotidianos.
  - Predice la mayor o menor frecuencia de un conjunto de datos, o si la posibilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro. Así también, explica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.
- esperado del ciclo V, realiza desempeños como los siguientes:
- Representa las características de una población en estudio sobre situaciones de interés o aleatorias, asociándolas a variables cualitativas (por ejemplo: vóley, tenis) y cuantitativas discretas (por ejemplo: 3, 4, 5 hijos), así como también el comportamiento del conjunto de datos, a través de gráficos de barras dobles, gráficos de líneas, la moda y la media aritmética como reparto equitativo.
  - Determina todos los posibles resultados de una situación aleatoria a través de su probabilidad como fracción.
  - Expresa su comprensión de la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como reparto equitativo; así como todos los posibles resultados de una situación aleatoria en forma oral usando las nociones “más probables” o “menos probables”, y numéricamente. Ejemplo: *El estudiante podría decir: “En dos de los cinco casos, el resultado es favorable: 2/5”*.
  - Lee tablas de doble entradas y gráficas de barras dobles, así como información proveniente de diversas fuentes (periódicos, revistas, entrevistas, experimentos, etc.), para interpretar la información que contienen considerando los datos, las condiciones de la situación y otra información que se tenga sobre las variables. También, advierte que hay tablas de doble entrada con datos incompletos, las completa y produce nueva información.
  - Recopila datos mediante encuestas sencillas o entrevistas cortas con preguntas adecuadas empleando procedimientos y recursos; los procesa y organiza en tablas de doble entrada o tablas de frecuencia, para describirlos y analizarlos.
  - Selecciona y emplea procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, las tablas de
-

---

frecuencia u otros, para determinar la media aritmética como reparto equitativo, la moda, los casos favorables a un suceso y su probabilidad como fracción.

- Predice la tendencia de los datos o la ocurrencia de sucesos a partir del análisis de los resultados de una situación aleatoria. Así también, justifica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.
- 

(MINEDU, 2016, p. 269-270)

### **Estrategias didácticas.**

Es la proyección de un sistema de acciones y recursos a corto, mediano y largo plazo en un contexto determinado que permite la transformación del proceso de enseñanza y aprendizaje y el logro de los propósitos en un tiempo concreto.

### **Saber sabio, saber a enseñar, saber escolar.**

Según Chevallard (1991) el saber sabio es "...un saber exiliado de sus orígenes y separado de su historia..." (p.18)

Por otro lado, "El saber enseñado supone un proceso de naturalización, que le confiere la evidencia incontestable de las cosas naturales..." (p.18)

"El saber enseñado debe aparecer conforme al saber a enseñar" (p.17)

### **Tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.**

Las tareas son las situaciones problemas o problemas a los que se enfrentan los estudiantes. Las técnicas son prácticas que funcionan con cierto contenido matemático y que sirven para estudiar y dirigir el estudio (Chevallard et al., 2005).

Según Chevallard (2005), "una tecnología es un discurso matemático que justifica y permite entender cierta técnica" (p.253). También permite obtener nuevas técnicas.

Mientras que la teoría es la tecnología de la tecnología o la teoría de la técnica que justifica porqué es así.

Según Gonzales (2014), los tipos de tareas son “obras” que provienen de cierta construcción institucional y cuya reconstrucción en cierta institución es un objeto de estudio de la didáctica” (p.38)

Los tipos de tareas no solo se resuelven por una técnica, pueden ser varias técnicas, esta depende del alcance que tenga la técnica.

Según Fonseca (2004), para describir el grado de completitud de una organización matemática o praxeología en términos de sus características organizativas y relaciones, podemos tener en cuenta los indicadores siguientes: Si los tipos de tareas están integradas; si existen tareas relativas al cuestionamiento tecnológico; si hay diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas; si hay independencia de los procesos para comprender los conocimientos matemáticos, representar las técnicas y cambiar de una técnica a otra; si existen tareas y técnicas “inversas”; si hay interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas; si existe tareas matemáticas “abiertas” ;y si hay una necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.

## Capítulo III. Hipótesis y Variables

### 3.1 Supuestos Hipotéticos

S<sub>H1</sub>. Los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en el Programa Curricular de Educación Primaria del V ciclo tienen un desarrollo parcial con respecto a las ideas estocásticas fundamentales y su didáctica.

S<sub>H2</sub>. Los tratamientos didácticos del sentido estocástico en las orientaciones metodológicas de las rutas del aprendizaje del V ciclo son incompletas respecto a la Organización del aprendizaje y las estrategias didácticas.

S<sub>H3</sub>. La praxeología matemática y didáctica del sentido estocástico en los textos de matemática del V ciclo son incompletos respecto a las tareas y técnicas.

S<sub>H4</sub>. Las transformaciones matemáticas que ha sufrido el saber sabio, saber a enseñar y saber escolar del sentido estocástico en el V ciclo evidencian vacíos, rupturas e incoherencias entre los recursos y herramientas que implementan el Currículo Nacional.

### 3.2 Sistemas y Categorías de Análisis

#### Sistemas de análisis:

- Programa curricular de Educación Primaria.
- Orientaciones Metodológicas de las rutas de aprendizaje
- Texto escolar del quinto grado de primaria.
- Texto escolar del sexto grado de primaria.
- Teoría de transposición didáctica.
- Teoría de Antropología didáctica.

**Categorías de análisis.**

Competencia matemática referida a la incertidumbre, estándar de la competencia, capacidades de la competencia matemática, desempeños de la competencia matemática del V ciclo.

**Estrategias didácticas en matemática.**

- Saber sabio, saber a enseñar, saber escolar.
- Tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

## Capítulo IV. Metodología

La metodología de la investigación es descriptiva – cualitativa.

Se han planteado los siguientes problemas específicos:

P1: ¿Cuáles son los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en el Programa Curricular de Educación Primaria del V ciclo?

P2: ¿Cuáles son los tratamientos didácticos del sentido estocástico en las orientaciones metodológicas de las rutas del aprendizaje del V ciclo?

P3: ¿Cuál es la praxeología matemática y didáctica del sentido estocástico en los textos de matemática del V ciclo?

P4: ¿Cuáles son las transformaciones matemáticas que ha sufrido el saber sabio, saber a enseñar y saber escolar del sentido estocástico en el V ciclo?

La primera pregunta se ha respondido haciendo un análisis de los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en el Programa Curricular de Educación Primaria del V ciclo.

La segunda pregunta se ha respondido a partir de haber analizado y descrito los tratamientos didácticos del sentido estocástico en las orientaciones metodológicas de las Rutas del Aprendizaje del V ciclo.

La tercera pregunta se ha respondido cuando se ha analizado y caracterizado la praxeología matemática y didáctica del sentido estocástico en los textos de Matemática del V ciclo proporcionado por el Ministerio de Educación mediante la teoría antropológica de lo didáctico de Yves Chevallard.

La cuarta interrogante, relacionada con las transformaciones que sufre el saber matemático saber a enseñar y saber escolar del sentido estocástico en el V ciclo, se ha respondido cuando se ha analizado y descrito la transposición didáctica que ha sufrido el saber del sentido estocástico de los apartados anteriores.

#### **4.1 Enfoque de Investigación**

El enfoque es cualitativo con análisis documental.

Según Cuba y Lincoln (1981), citado en Silva (2005), por medio de los documentos podemos, recoger datos cuando el acceso a la materia es poco práctico, obtener información a bajo costo y explorar por diferentes métodos. Todo ello permitirá fundamentar las afirmaciones y declaraciones del investigador.

#### **4.2 Tipo de Investigación**

El tipo de investigación es, descriptiva y explicativa.

#### **4.3 Diseño de Investigación**

“El diseño al igual que la muestra, la recolección de los datos y el análisis, va surgiendo desde el planteamiento del problema hasta la inmersión inicial y el trabajo de campo y, desde luego, sufre modificaciones, aun cuando es, más bien, una forma de enfocar el fenómeno de interés.” Hernández (2014 P. 470)

Esta investigación tiene un diseño etnográfico porque busca describir, interpretar y analizar ideas, creencias, significados, conocimientos y prácticas; como lo señalan McLeod y Thomson (2009) y Patton (2009), que están presentes en sistemas sociales (grupos, comunidades, cultura y sociales).

#### **4.4 Acceso al Campo. Muestra o Participantes**

Para recolectar la información sobre el Programa Curricular de Primaria del V ciclo y las orientaciones metodológicas de las Rutas de Aprendizaje V ciclo, he accedido a las publicaciones hechas por el Ministerio de Educación a nivel nacional. Asimismo, para recolectar la información sobre el Texto de matemática del V ciclo, he accedido a ella a través de la Sede Central del Ministerio de Educación.

#### **4.4.1 Análisis de los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en el Programa Curricular de Educación Primaria V ciclo.**

El Programa Curricular de Educación Primaria ha sido aprobado por el Ministerio de Educación el 15 de diciembre con Resolución Ministerial N.º 649-2016-MINEDU.

En este documento se presenta una organización matemática escolar y una organización didáctica.

Según el documento el enfoque que sustenta el desarrollo de las competencias en el área de Matemática, es el “enfoque centrado en la resolución de problemas”. Este enfoque le da a la matemática escolar un marco teórico y metodológico que orienta el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este enfoque, tiene las siguientes características:

- ❖ La matemática es un producto cultural dinámico, cambiante, en constante desarrollo y reajuste.
- ❖ Toda actividad matemática tiene como escenario la resolución de problemas planteados a partir de situaciones, las cuales se conciben como acontecimientos significativos que se dan en diversos contextos. Las situaciones se organizan en cuatro grupos: situaciones de cantidad; situaciones de regularidad, equivalencia y cambio; situaciones de forma, movimiento y localización; y situaciones de gestión de datos e incertidumbre.
- ❖ Al plantear y resolver problemas, los estudiantes se enfrentan a retos para los cuales no conocen de antemano las estrategias de solución, esto les demanda desarrollar un proceso de indagación y reflexión social e individual que les permita superar las dificultades u obstáculos que surjan en la búsqueda de la solución. En este proceso, construyen y reconstruyen sus conocimientos al relacionar y reorganizar ideas y conceptos matemáticos que emergen como solución óptima a los problemas, que irán aumentando en grado de complejidad.

- ❖ Los problemas que resuelven los estudiantes pueden ser planteados por ellos mismos o por el docente; de esta manera, se promoverá la creatividad y la interpretación de nuevas y diversas situaciones.
- ❖ Las emociones, actitudes y creencias actúan como fuerzas impulsoras del aprendizaje.
- ❖ Los estudiantes aprenden por sí mismos cuando son capaces de autorregular su proceso de aprendizaje y reflexionar sobre sus aciertos, errores, avances y las dificultades que surgieron durante el proceso de resolución de problemas.  
(MNEDU, 2016, p.231)

Las competencias del área de Matemática son dadas para toda la educación básica.

En el nivel de Primaria y secundaria estas son:

- Resuelve problemas de cantidad.
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

Como podemos apreciar el tratamiento matemático y didáctico del sentido estocástico se analizará en la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre”. Dicha competencia, según el MINEDU, es trabajado bajo el enfoque del área, que es centrado en la resolución de problemas.

Como cada competencia tiene sus estándares de aprendizaje que describen cómo se desarrolla la competencia en los 7 niveles de progresión de manera holística; es decir, combinando las capacidades de cada competencia, para el análisis del estándar de la competencia “Resuelve problemas de Gestión de datos e Incertidumbre” para el V ciclo. Tendrá que verse también el ciclo anterior (IV ciclo) y el ciclo posterior (VI ciclo) por el criterio de progresión del aprendizaje.

**Tabla 9.**

*Estándares de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del IV, V y VI ciclo*

<b>IV CICLO (NIVEL 4)</b>	<b>V CICLO (NIVEL 5)</b>	<b>VI CICLO (NIVEL 6)</b>
Resuelve problemas relacionados con datos cualitativos o cuantitativos (discretos) sobre un tema de estudio, recolecta datos a través de encuestas y entrevistas sencillas, registra en tablas de frecuencia simples y los representa en pictogramas, gráficos de barra simple con escala (múltiplos de diez). Interpreta información contenida en gráficos de barras simples y dobles y tablas de doble entrada, comparando frecuencias y usando el significado de la moda de un conjunto de datos; a partir de esta información elabora algunas conclusiones y toma decisiones. Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable y justifica su respuesta.	Resuelve problemas relacionados con temas de estudio, en los que reconoce variables cualitativas o cuantitativas discretas, recolecta datos a través de encuestas y de diversas fuentes de información. Selecciona tablas de doble entrada, gráficos de barras dobles y gráficos de líneas, seleccionando el más adecuado para representar los datos. Usa el significado de la moda para interpretar información contenida en gráficos y en diversas fuentes de información. Realiza experimentos aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Elabora y justifica predicciones, decisiones y conclusiones, basándose en la información obtenida en el análisis de datos o en la probabilidad de un evento.	Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, identificando la población pertinente y las variables cuantitativas continuas, así como cualitativas nominales y ordinales. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas de datos agrupados, así también determina la media aritmética y mediana de datos discretos; representa su comportamiento en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos circulares, tablas de frecuencia y medidas de tendencia central; usa el significado de las medidas de tendencia central para interpretar y comparar la información contenida en estos. Basado en ello, plantea y contrasta conclusiones, sobre las características de una población. Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica.

Es necesario recordar que la competencia “Resuelve problemas de Gestión de datos e Incertidumbre”, según el MINEDU (2016), consiste en que el estudiante analice datos sobre un tema de interés o estudio o de situaciones aleatorias que le permitan tomar decisiones, elaborar predicciones razonables y conclusiones respaldadas en la información producida. Para ello, el estudiante recopila, organiza y representa datos que le dan insumos

para el análisis, interpretación e inferencia del comportamiento determinista o aleatorio de la situación usando medidas estadísticas y probabilísticas. (p. 263)

Asimismo, esta competencia implica la combinación de las siguientes capacidades:

- ***Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas:*** es representar el comportamiento de un conjunto de datos, seleccionando tablas o gráficos estadísticos, medidas de tendencia central, de localización o dispersión. Reconocer variables de la población o la muestra al plantear un tema de estudio. Así, también implica el análisis de situaciones aleatorias y representar la ocurrencia de sucesos mediante el valor de la probabilidad.
- ***Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos:*** es comunicar su comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en relación a la situación. Leer, describir e interpretar información estadística contenida en gráficos o tablas provenientes de diferentes fuentes.
- ***Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos:*** es seleccionar, adaptar, combinar o crear una variedad de procedimientos, estrategias y recursos para recopilar, procesar y analizar datos, así como el uso de técnicas de muestreo y el cálculo de las medidas estadísticas y probabilísticas.
- ***Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida:*** es tomar decisiones, hacer predicciones o elaborar conclusiones y sustentarlas con base en la información obtenida del procesamiento y análisis de datos, así como de la revisión o valoración de los procesos. (MNEDU, 2016, p.263)

Como en cada nivel de desarrollo de la competencia, el estándar, describe:

- La relación entre las capacidades de la competencia, de forma holística y combinada.
- Un grado de complejidad relacionado al desarrollo cognitivo de los estudiantes. Por ejemplo, el nivel 6 corresponde a estudiantes que están iniciando un pensamiento formal.
- Cada nivel está interrelacionado con el siguiente y el anterior. Por ejemplo, si ocurre un cambio en un nivel, estos generan cambios en los niveles restantes; es por ello, como ya dijimos, se hará el análisis de la descripción de la competencia para el V ciclo, el ciclo anterior (IV ciclo) y el ciclo posterior (VI ciclo).
- Cada nivel superior presenta mayor nivel de complejidad que el anterior.
- En consecuencia, todo lo antes señalado serán criterios a tener en cuenta para el análisis del estándar.

A) Análisis de los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en el estándar de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del V ciclo

Para enseñar el sentido estocástico en el V ciclo, es necesario saber el contenido matemático y el contenido didáctico, es decir qué conocimientos de las matemáticas escolares están presentes en el estándar y cómo están organizados de tal manera que el docente tenga claro el objeto de enseñanza y aprendizaje.

Las tablas nos ayudarán a visualizar el tratamiento matemático y didáctico del sentido estocástico teniendo en cuenta los criterios de precisión, coherencia y progresividad con el nivel previo y posterior del V ciclo en las dimensiones de contenido matemático y el contenido didáctico.

**Tabla 10.**

*Contenido matemático (conocimientos) presentes en los Estándares de Aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del IV, V y VI ciclo.*

<b>IV CICLO (Nivel 4)</b>	<b>V CICLO (Nivel 5)</b>	<b>VI CICLO (Nivel 6)</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Suceso seguro.</li> <li>• Más probable.</li> <li>• Menos probable.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Experimento aleatorio.</li> <li>• Probabilidad de un suceso relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Espacio muestral.</li> <li>• Probabilidad de un suceso aleatorio como decimal o fracción.               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Suceso seguro.</li> <li>- Suceso probable.</li> <li>- Suceso imposible</li> </ul> </li> <li>• Probabilidad de sucesos asociados a los valores entre 0 y 1.</li> </ul>

*Comentario:* En el V ciclo se aborda experimento aleatorio, sin embargo, en el nivel previo no se aborda, más aún cuando se está trabajando suceso seguro y comparando probabilidades.

Asimismo, como se puede visualizar en la tabla, en el V ciclo se aborda la probabilidad de un suceso relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles, es decir la definición de la probabilidad desde el punto de vista Laplaciano, pero no se contempla el espacio muestral, lo cual si se considera en el VI ciclo. Además, las estructuras conceptuales visualizadas en la tabla no se relacionan con sistemas de representación que permitan articular un tema y darle significado. Por todo lo antes señalado, podemos decir que hay evidencias de que la coherencia, progresión y precisión se debe mejorar en el estándar.

Respecto a las ideas estocásticas fundamentales en el V ciclo se puede apreciar que se aborda solo una de ellas, La probabilidad como Normalización de nuestras creencias, pero con dificultad pues no están presentes, por ejemplo: sucesos y sus tipos.

Por consiguiente, proponemos los siguientes contenidos matemáticos

(conocimientos).

**Tabla 11.**

*Propuesta del contenido matemático (conocimientos) para los Estándares de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del IV, V y VI ciclo*

IV CICLO (Nivel 4)	V CICLO (Nivel 5)	VI CICLO (Nivel 6)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Situación determinista.</li> <li>• Situación no determinista o aleatoria.</li> <li>• Restricciones de una situación aleatoria.</li> <li>• Ordenar posibilidades de ocurrencia de sucesos.</li> <li>• Nociones de espacio muestral.</li> <li>• Suceso simple.</li> <li>• Nociones de sucesos compuestos, mutuamente excluyentes (no ocurren al mismo tiempo), no excluyentes (ocurren ambos a la vez)</li> <li>• Diagrama de árbol.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Experimento aleatorio o situación aleatoria.</li> <li>- Restricciones y condiciones de una situación aleatoria.</li> <li>• Probabilidad clásica.</li> <li>• Noción de la probabilidad frecuentista.</li> <li>• Espacio muestral.</li> <li>• Equiprobabilidad y simetría.</li> <li>- Equiprobabilidad y no equiprobabilidad del espacio muestral.</li> <li>• Nociones de suceso compuesto, unión, intersección, exhaustivo, suceso complemento, sucesos con reemplazo (suceso independiente), suceso sin reemplazo (suceso dependiente).</li> <li>• Compara probabilidades: más probable y menos probable.</li> <li>• Nociones de combinatoria con el uso del diagrama del árbol.</li> <li>• Nociones de variable aleatoria (ej. Obtener como suma 7 al lanzar dos dados).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Equiprobabilidad y simetría del espacio muestral.</li> <li>• Probabilidad Laplaciano. Propiedades.</li> <li>• Probabilidad frecuentista.</li> <li>• Técnicas de conteo: Regla de la adición. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes.</li> <li>- Probabilidad de sucesos no excluyentes.</li> </ul> </li> <li>• Probabilidad de sucesos exhaustivos.</li> <li>• Compara probabilidades.</li> <li>• Combinatoria</li> <li>• Sucesos independientes.</li> <li>• Nociones de variable aleatoria.</li> </ul>

*Comentario:* Como manifestó Heitele (1975) y Batanero (2015), las ideas estocásticas fundamentales (La probabilidad como normalización de nuestras creencias, el conjunto de todas las posibilidades, la equidistribución y simetría, la regla de adición de probabilidades, la independencia y regla del producto, la probabilidad condicional, la independencia, la combinatoria y la variable aleatoria) deben tratarse en primera instancia,

de manera intuitiva para luego propender a una comprensión correcta. Además, Heitele (1975) señaló que estas ideas deben tenerse en cuenta para elaborar un diseño curricular coherente pues se vinculan con la enseñanza.

A continuación, realizaremos el análisis didáctico sobre cómo están organizados los contenidos didácticos de tal manera que el docente tenga claro el objeto de enseñanza y aprendizaje, la evaluación y los propósitos que se espera alcanzar. Visualizaremos en la siguiente tabla cómo se presenta el contenido didáctico del V ciclo referido a la incertidumbre propuesto por el MINEDU.

**Tabla 12.**

*Contenido didáctico presentes en los Estándares de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del IV, V y VI ciclo.*

<b>IV CICLO (Nivel 4)</b>	<b>V CICLO (Nivel 5)</b>	<b>VI CICLO (Nivel 6)</b>
Resuelve problemas relacionados con datos cualitativos o cuantitativos (discretos) sobre un tema de estudio, recolecta datos a través de encuestas y entrevistas sencillas, registra en tablas de frecuencia simples y los representa en pictogramas, gráficos de barra simple con escala (múltiplos de diez). Interpreta información contenida en gráficos de barras simples y dobles y tablas de doble entrada, comparando frecuencias y usando el significado de la moda de un conjunto de datos; a partir de esta información elabora algunas conclusiones y toma decisiones. Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable y justifica su respuesta.	Resuelve problemas relacionados con temas de estudio, en los que reconoce variables cualitativas o cuantitativas discretas, recolecta datos a través de encuestas y de diversas fuentes de información. Selecciona tablas de doble entrada, gráficos de barras dobles y gráficos de líneas, seleccionando el más adecuado para representar los datos. Usa el significado de la moda para interpretar información contenida en gráficos y en diversas fuentes de información. Realiza experimentos aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Elabora y justifica predicciones, decisiones y conclusiones, basándose en la información obtenida en el análisis de datos o en la probabilidad de un evento.	Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, identificando la población pertinente y las variables cuantitativas continuas, así como cualitativas nominales y ordinales. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas de datos agrupados, así también determina la media aritmética y mediana de datos discretos; representa su comportamiento en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos circulares, tablas de frecuencia y medidas de tendencia central; usa el significado de las medidas de tendencia central para interpretar y comparar la información contenida en estos. Basado en ello, plantea y contrasta conclusiones, sobre las características de una población. Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica.

*Comentario:* Respecto a la progresión con el nivel anterior y posterior al V ciclo referido a la estocástica:

- El operador, “Resolver” problemas, plasmado en el IV, V y VI ciclo, es el mismo. Además, podría entenderse, en el primer párrafo, que afecta solo a la gestión de datos y no a la incertidumbre, con la cual la primera capacidad “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas” quedaría exenta del propósito didáctico en lo referido a la incertidumbre. Asimismo, no sería un referente claro para la evaluación, la elaboración de materiales educativos y la formación docente.
- La segunda capacidad “Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos” se evidencia:
  - En el IV ciclo: recolecta datos a través de encuestas y entrevistas sencillas, registra en tablas de frecuencia simples y los representa en pictogramas, gráficos de barra simple con escala (múltiplos de diez).
  - En el V ciclo: Selecciona tablas de doble entrada, gráficos de barras dobles y gráficos de líneas, seleccionando el más adecuado para representar los datos.
  - En el VI ciclo: Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas de datos agrupados. Así también determina la media aritmética y mediana de datos discretos; representa su comportamiento en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos circulares, tablas de frecuencia y medidas de tendencia central.

No se visibiliza en esta capacidad una organización de aprendizajes referidos a la incertidumbre, por tanto, no existe progresión.

- La tercera capacidad “Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos” se evidencia:

- En el IV ciclo: Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable...
- En el V ciclo: Realiza experimentos aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles.
- En el VI ciclo: Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1.

Mientras que en el IV ciclo, el estudiante expresará la ocurrencia de sucesos; en el V ciclo este debe realizar experimentos aleatorios, reconocer sus posibles resultados y expresar la probabilidad Laplaciana; en el VI ciclo debe expresar la probabilidad como decimal o fracción, interpretar sucesos y asociar a los valores 0 y 1, como se puede ver la progresión de IV a V ciclo queda difusa en cuanto a los conocimientos, y hay cierto traslape que se da con la capacidad “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas”.

Del V ciclo al VI ciclo, la progresión se rompe en cuanto a los conocimientos, pues en el V ciclo ya se trabaja la probabilidad Laplaciana y en el VI ciclo se le pide la probabilidad como fracción. Por tanto, no se evidencia una buena progresión.

- La cuarta capacidad “Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida” se evidencia:

- En el IV ciclo: ... y justifica su respuesta.

- En el V ciclo: Elabora y justifica predicciones, decisiones y conclusiones, basándose en la información obtenida en el análisis de datos o en la probabilidad de un evento.
- En el VI ciclo: Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica.

En el IV ciclo, el justificar su respuesta podría entenderse que se refiere a, Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable... Mientras que en el V ciclo, además, debe justificar sus conclusiones y decisiones. Esto último que es importante, no progresa para el VI ciclo; por ello podemos decir que del V ciclo al VI ciclo, no hay mayor nivel de complejidad que el anterior. Por tanto, no será un buen referente para la evaluación de los aprendizajes a nivel de aula y a nivel de sistema, donde se debiera observar que los aprendizajes van progresando en grado de complejidad.

- No se evidencia el tratamiento de las situaciones en diferentes contextos.

Respecto a la precisión y coherencia en el V ciclo referido a la estocástica:

Las capacidades “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas” y “Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos” se evidencia que no hacen referencia a la incertidumbre, siendo que la relación entre las capacidades de la competencia debe estar dada en forma holística y combinada, estas solo refieren a la gestión de datos.

A continuación, teniendo en cuenta lo antes señalado, la tabla 01 y la tabla 02, se presenta una propuesta de contenidos didácticos como ajuste al estándar referido a la incertidumbre:

**Tabla 13.**

*Propuesta del contenido didáctico referido a la estocástica para el IV, V y VI ciclo*

<b>IV CICLO (Nivel 4)</b>	<b>V CICLO (Nivel 5)</b>	<b>VI CICLO (Nivel 6)</b>
<p>Representa problemas situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos cotidianos o personales con nociones de sucesos compuestos, sucesos mutuamente excluyentes o no excluyentes. Expresa, las restricciones de una situación aleatoria y las nociones de cuando un suceso es compuesto, mutuamente excluyente y no excluyente. Registra la ocurrencia de sucesos y visibiliza la ocurrencia de sucesos compuestos en el diagrama del árbol. Compara las posibilidades de ocurrencia de sucesos. Así mismo, a partir de la información, justifica afirmaciones, elabora conclusiones y toma decisiones.</p>	<p>Representa problemas, situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos educativos, ocupacionales o laborales con la probabilidad clásica y frecuencia relativa con ensayos hasta 300. Encuentra todos los resultados posibles o espacio muestral y los resultados favorables. Usa la simulación, el diagrama de árbol, tablas, diagramas de Venn y otros para hallar la probabilidad de un suceso, operar nocionalmente con sucesos y combinar. Compara la probabilidad de sucesos (por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa usando fracciones). Expresa, las restricciones y condiciones de una situación o experimento aleatorio, la noción de variable aleatoria (con juegos y experimentos), la noción de cuando un suceso es dependiente, independiente o exhaustivo y la determinación de una muestra al azar. Interpreta la probabilidad de un suceso relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Asimismo, interpreta los conceptos de sucesos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples. Verifica la equiprobabilidad o no del espacio muestral y su simetría. Formula predicciones, conclusiones y toma decisiones con base en la probabilidad de un suceso.</p>	<p>Representa problemas situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos públicos con la probabilidad de Laplace y frecuentista. Interpreta el espacio muestral y la probabilidad de un suceso asociándolos a los valores desde 0 hasta 1. Usa la simulación, el diagrama de árbol, tablas, diagramas de Venn y otros para calcular la probabilidad Laplaciano y frecuentista de un suceso y hacer combinaciones. Halla la probabilidad de sucesos exhaustivos y emplea la regla de adición. Compara probabilidades de distintos sucesos sin calcularlas. Predice la ocurrencia de sucesos y toma decisiones con base en la probabilidad de un suceso. Justifica la pertinencia de sus decisiones. Conjetura acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo</p>

Entonces la propuesta insertada al estándar del V ciclo y que se coloca en **negrita**, se presenta en la siguiente tabla:

**Propuesta de estándar V ciclo para la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre”.**

***Descripción del nivel de la competencia esperado al final del ciclo V.***

Representa problemas, situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos educativos, ocupacionales o laborales con la probabilidad clásica y frecuencia relativa con ensayos hasta 300. Asimismo, relaciona interrogantes sobre características de un grupo con datos de variables cualitativas o cuantitativas discretas, gráficos de barras dobles o gráficos de líneas. Expresa las restricciones y condiciones de una situación o experimento aleatorio, la noción de variable aleatoria (con juegos y experimentos), la noción de cuando un suceso es dependiente, independiente o exhaustivo y la determinación de una muestra al azar. Interpreta la probabilidad de un suceso relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Asimismo, interpreta los conceptos de sucesos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples. Formula cuestionarios para recoger datos, interpreta datos en tablas o gráficos, expresa la noción de media como una medida que es resultado de un reparto equitativo. Encuentra todos los resultados posibles o espacio muestral y los resultados favorables. Halla la probabilidad de un suceso y opera con sucesos. Usa la simulación, el diagrama de árbol, tablas, diagramas de Venn y otros para hallar la probabilidad de un suceso, operar nocionalmente con sucesos y combinar. Compara la probabilidad de sucesos (por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa usando fracciones). Calcula la frecuencia acumulada, la media, la mediana y la moda; construye tablas y gráficos. Verifica la equiprobabilidad o no del espacio muestral. Formula predicciones, conclusiones y toma decisiones con base en la probabilidad de un suceso y a la información estadística.

*Comentario:* Con la organización propuesta y los ajustes planteados se puede reajustar los desempeños del V ciclo de la competencia en cuestión y, en consecuencia, mejorar el referente para la programación curricular, la evaluación, la elaboración de materiales educativos y la articulación con la formación docente.

B) Análisis de los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del V ciclo.

El desempeño es más específico que el estándar y describe lo que hace un estudiante que logra el nivel o se encuentra en proceso hacia el nivel esperado del estándar. Las acciones descritas deben ser observables en una diversidad de situaciones y/o contextos, y debe ser coherente a la definición de capacidad.

Además, el conjunto de desempeños debe mostrar, la combinación de capacidades que se ponen en juego en el estándar de manera clara y en progresión.

En la siguiente tabla, se presenta el análisis de los desempeños de quinto grado según capacidades de la competencia en cuestión, teniendo en cuenta los contenidos conceptuales que aborda, los contextos de los cuales se sirve para dar significado y las acciones.

Seguidamente, en la siguiente columna, se hace una propuesta de contenidos.

**Tabla 14.**

*Análisis y Propuesta del contenido matemático (conocimientos) a los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del quinto grado de primaria en lo referido a la estocástica.*

<b>Desempeños de 5. ° grado según el Programa Curricular Primaria.</b>	<b>Contenidos en los desempeños del 5. ° grado respecto a la estocástica. (MINEDU)</b>	<b>Contenidos propuestos para el 5. ° grado respecto a la estocástica.</b>
<p>Representa las características de una población en estudio, las que asocia a variables cualitativas (por ejemplo, color de ojos: pardos, negros; profesión: médico, abogado, etc.) y cuantitativas discretas (por ejemplo, número de hermanos: 3, 2; cantidad de goles: 2, 4, 5, etc.), así como también el comportamiento del conjunto de datos, a través de pictogramas verticales y horizontales (cada símbolo representa más de una unidad), gráficos de barras con escala dada (múltiplos de 10), la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como punto de equilibrio.</p> <p>Expresa su comprensión de la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como punto de equilibrio; así como todos los posibles resultados de la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones “seguro”, “más probable” y “menos probable”.</p> <p>Lee gráficos de barras con escala, tablas de doble entrada y pictogramas de frecuencias con equivalencias, para interpretar la información del mismo conjunto de datos contenidos en diferentes formas de representación y de la situación estudiada.</p>	<p>CONTENIDOS CONCEPTUALES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- No registra.</li> </ul> <p>EL CONTEXTO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- No registra.</li> </ul> <p>LAS ACCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- No registra.</li> </ul> <p>CONTENIDOS CONCEPTUALES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Todos los posibles resultados.</li> <li>- Suceso “seguro”.</li> <li>- “más probable”</li> <li>- “menos probable”.</li> </ul> <p>EL CONTEXTO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Lo cotidiano.</li> </ul> <p>LAS ACCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Expresa su comprensión.</li> </ul>	<p>CONTENIDOS CONCEPTUALES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Espacio muestral.</li> </ul> <p>EL CONTEXTO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Educativos, ocupacionales o laborales.</li> </ul> <p>LAS ACCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Representa problemas, situaciones y experimentos.</li> </ul> <p>CONTENIDOS CONCEPTUALES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Situación o experimento aleatorio.</li> </ul> <p>EL CONTEXTO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Educativos, ocupacionales o laborales.</li> </ul> <p>LAS ACCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Expresa las restricciones y condiciones.</li> </ul>

<p>Recopila datos mediante encuestas sencillas o entrevistas cortas con preguntas adecuadas empleando procedimientos y recursos; los procesa y organiza en listas de datos, tablas de doble entrada o tablas de frecuencia, para describirlos y analizarlos.</p>	<p>CONTENIDOS CONCEPTUALES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Todos los posibles resultados de la ocurrencia de sucesos cotidianos.</li> </ul> <p>EL CONTEXTO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Lo cotidiano.</li> </ul>	<p>CONTENIDOS CONCEPTUALES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Todos los posibles resultados de la ocurrencia de sucesos cotidianos. (ídem).</li> </ul> <p>EL CONTEXTO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Educativos, ocupacionales o laborales.</li> </ul>
<p>Selecciona y emplea procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, las tablas de frecuencia u otros, para determinar la media aritmética como punto de equilibrio, la moda como la mayor frecuencia y todos los posibles resultados de la ocurrencia de sucesos cotidianos.</p>	<p>LAS ACCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Selecciona y emplea procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, las tablas de frecuencia u otros.</li> </ul>	<p>LAS ACCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Selecciona procedimientos y recursos como el recuento, diagrama de árbol, tablas.</li> </ul>
<p>Predice la mayor o menor frecuencia de un conjunto de datos, o si la posibilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro. Así también, explica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.</p>	<p>CONTENIDOS CONCEPTUALES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Posibilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro.</li> </ul> <p>EL CONTEXTO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- No registra.</li> </ul>	<p>CONTENIDOS CONCEPTUALES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Equiprobabilidad del espacio muestral</li> <li>- No equiprobabilidad del espacio muestral.</li> <li>- Posibilidad de mayor ocurrencia de un suceso con respecto a otro.</li> </ul>
	<p>LAS ACCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Predice si la posibilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro.</li> <li>- Explica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.</li> </ul>	<p>EL CONTEXTO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Educativos, ocupacionales o laborales.</li> </ul> <p>LAS ACCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Verifica la equiprobabilidad o no del espacio muestral.</li> <li>- Formula predicciones, conclusiones y toma decisiones.</li> </ul>

*Comentario:* El primer desempeño que corresponde a la primera capacidad, “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas”, no tiene asociado a este un contenido conceptual, sin embargo, en la definición de esta capacidad se dice “... implica el análisis de situaciones aleatorias y representar la ocurrencia de sucesos mediante el valor de la probabilidad” (MINEDU, 2016, p. 263), tampoco se asocia a una situación, esto es importante pues permite dar significado al concepto. Hay ausencia respecto de las acciones que permite operar al interior de esta capacidad.

Hay algunos vacíos conceptuales en los desempeños; por ejemplo, el tema de situación o experimento aleatorio, la equiprobabilidad y no equiprobabilidad del espacio muestral y la posibilidad de mayor ocurrencia de un suceso con respecto a otro.

En los desempeños, solo se hace mención de contextos cotidianos y no hay otros tipos de contextos en las cuales el concepto va adquiriendo sentido.

En el desempeño que refiere a la capacidad “Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos”, dice: Expresa su comprensión de la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como punto de equilibrio; así como todos los posibles resultados de la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones “seguro”, “más probable” y “menos probable”. Este desempeño está en correlato con el estándar de IV ciclo y no con el de V ciclo en lo que se refiere a la incertidumbre. Observemos los estándares de IV ciclo y el de V ciclo:

*Estándar del IV ciclo:*

Resuelve problemas relacionados con datos cualitativos o cuantitativos (discretos) sobre un tema de estudio, recolecta datos a través de encuestas y entrevistas sencillas, registra en tablas de frecuencia simples y los representa en pictogramas, gráficos de barra simple con escala (múltiplos de diez). Interpreta información contenida en gráficos de barras simples y dobles y tablas de doble entrada, comparando frecuencias y usando el significado de la moda de un conjunto de datos. A partir de esta información elabora algunas conclusiones y toma decisiones. Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable y justifica su respuesta.

*Estándar del V ciclo:*

Resuelve problemas relacionados con temas de estudio, en los que reconoce variables cualitativas o cuantitativas discretas, recolecta datos a través de encuestas y de diversas fuentes de información. Selecciona tablas de doble entrada, gráficos de barras

dobles y gráficos de líneas, seleccionando el más adecuado para representar los datos. Usa el significado de la moda para interpretar información contenida en gráficos y en diversas fuentes de información. Realiza experimentos aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Elabora y justifica predicciones, decisiones y conclusiones, basándose en la información obtenida en el análisis de datos o en la probabilidad de un evento.

Es comunicar su comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en relación a la situación. Leer, describir e interpretar información estadística contenida en gráficos o tablas provenientes de diferentes fuentes.

Asimismo, el desempeño que refiere a la capacidad “Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida” dice: Predice la mayor o menor frecuencia de un conjunto de datos, o si la posibilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro. Así también, explica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos. Este desempeño también está en correlato con el estándar de IV ciclo y no con el de V ciclo en lo que se refiere a la incertidumbre.

Con respecto al desempeño de la capacidad “Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida”, podemos señalar que la demanda cognitiva de la acción planteada puede mejorarse así:

- Verifica la equiprobabilidad o no del espacio muestral.
- Formula predicciones, conclusiones y toma decisiones.

**Tabla 15.**

*Análisis y Propuesta del contenido matemático (conocimientos) a los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del sexto grado de primaria en lo referido a la estocástica*

<b>6. ° grado según el Programa Curricular Primaria.</b>	<b>Contenidos en los desempeños del 6. ° grado (MINEDU).</b>	<b>Contenidos propuestos para el 6. ° grado.</b>
<p>Representa las características de una población en estudio sobre situaciones de interés o aleatorias, asociándolas a variables cualitativas (por ejemplo: vóley, tenis) y cuantitativas discretas (por ejemplo: 3, 4, 5 hijos), así como también el comportamiento del conjunto de datos, a través de gráficos de barras dobles, gráficos de líneas, la moda y la media aritmética como reparto equitativo.</p> <p>• Determina todos los posibles resultados de una situación aleatoria a través de su probabilidad como fracción.</p> <p>Expresa su comprensión de la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como reparto equitativo; así como todos los posibles resultados de una situación aleatoria en forma oral usando las nociones “más probables” o “menos probables”, y numéricamente. Ejemplo: El estudiante podría decir: “En dos de los cinco casos, el resultado es favorable: 2/5”.</p> <p>Lee tabla de doble entrada y gráfica de barras dobles, así como información proveniente de diversas fuentes (periódicos, revistas, entrevistas, experimentos, etc.), para interpretar la información que contienen considerando los datos, las condiciones de la situación y otra información que se tenga sobre las variables. También, advierte que hay tablas de doble entrada con datos incompletos, las completa y produce nueva información.</p>	<p><b>CONTENIDOS CONCEPTUALES</b> Situación aleatoria. Posibles resultados de una situación aleatoria. Probabilidad como fracción.</p> <p><b>EL CONTEXTO</b> No registra.</p> <p><b>LAS ACCIONES</b> Representa características Determina la probabilidad.</p> <p><b>CONTENIDOS CONCEPTUALES</b> Todos los posibles resultados de una situación aleatoria en forma oral y numéricamente. Usa las nociones “más probables” o “menos probables”.</p> <p><b>EL CONTEXTO</b> No registra.</p> <p><b>LAS ACCIONES</b> Expresa su comprensión.</p>	<p><b>CONTENIDOS CONCEPTUALES</b> Probabilidad clásica.</p> <p><b>EL CONTEXTO</b> Educativos, ocupacionales o laborales.</p> <p><b>LAS ACCIONES</b> Representa problemas, situaciones y experimentos.</p> <p><b>CONTENIDOS CONCEPTUALES</b> Experimento aleatorio. Suceso dependiente. Suceso independiente. Probabilidad de Laplace. Sucesos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.</p> <p><b>EL CONTEXTO</b> Educativos, ocupacionales o laborales.</p> <p><b>LAS ACCIONES</b> Expresa las restricciones y condiciones. Interpreta la probabilidad y conceptos de sucesos.</p>

<p>Recopila datos mediante encuestas sencillas o entrevistas cortas con preguntas adecuadas empleando procedimientos y recursos; los procesa y organiza en tablas de doble entrada o tablas de frecuencia, para describirlos y analizarlos.</p>	<p><b>CONTENIDOS CONCEPTUALES</b> Casos favorables a un suceso y su probabilidad como fracción.</p> <p><b>EL CONTEXTO</b> No registra.</p>	<p><b>CONTENIDOS CONCEPTUALES</b> Espacio muestral. Suceso exhaustivo. Probabilidad de sucesos. Operaciones con sucesos. Comparación de probabilidades.</p>
<p>Selecciona y emplea procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, las tablas de frecuencia u otros, para determinar la media aritmética como reparto equitativo, la moda, los casos favorables a un suceso y su probabilidad como fracción.</p>	<p><b>LAS ACCIONES</b> Selecciona y emplea procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, las tablas de frecuencia u otros. Determina la probabilidad.</p>	<p><b>EL CONTEXTO</b> Educativos, ocupacionales o laborales.</p>
<p>Predice la tendencia de los datos o la ocurrencia de sucesos a partir del análisis de los resultados de una situación aleatoria. Así también, justifica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.</p>	<p><b>CONTENIDOS CONCEPTUALES</b> Situación aleatoria.</p> <p><b>EL CONTEXTO</b> No registra.</p> <p><b>LAS ACCIONES</b> Predice la ocurrencia de sucesos a partir del análisis de los resultados de una situación aleatoria.</p>	<p><b>LAS ACCIONES</b> Encuentra el espacio muestral. Halla la probabilidad. Opera con sucesos. Compara la probabilidad de sucesos por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa usando fracciones.</p> <p><b>CONTENIDOS CONCEPTUALES</b> Situación aleatoria. Equiprobabilidad del espacio muestral. No equiprobabilidad del espacio muestral. Probabilidad de un suceso. Posibilidad de mayor ocurrencia de un suceso con respecto a otro.</p>
		<p><b>EL CONTEXTO</b> Educativos, ocupacionales o laborales.</p>
		<p><b>LAS ACCIONES</b> Verifica la equiprobabilidad o no del espacio muestral. Formula predicciones, conclusiones y toma decisiones. Predice la ocurrencia de sucesos a partir del análisis de los resultados de una situación aleatoria. Pronostica si la probabilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro.</p>

*Comentario:* Ninguno de los desempeños registra el contexto el cual es importante para el significado de los conceptos. A diferencia de quinto grado, aquí si se ve la situación aleatoria; en tal sentido, no hay una progresión con el IV ciclo. Los conceptos giran en determinar la probabilidad y no se hace un trabajo intuitivo de la mayoría de las ideas estocásticas fundamentales (la probabilidad como normalización de nuestras creencias, el conjunto de todas las posibilidades, equidistribución y simetría, regla de adición de probabilidades, independencia y regla de productos, probabilidad condicional, independencia, combinatoria, variable aleatoria, las leyes de los grandes números, el muestreo, la simulación).

A continuación, se hace el análisis didáctico de los desempeños del quinto grado y, teniendo en cuenta también la tabla 01 y la tabla 02, se presenta una propuesta de mejora.

**Tabla 16.**

*Análisis y Propuesta del contenido didáctico a los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del quinto grado de primaria en lo referido a la estocástica.*

<b>Desempeños de 5. ° grado según el Programa Curricular Primaria.</b>	<b>Análisis de los Desempeños de 5. ° grado</b>	<b>Propuesta (en negrita lo referido a la estocástica).</b>
Representa las características de una población en estudio, las que asocia a variables cualitativas (por ejemplo, color de ojos: pardos, negros; profesión: médico, abogado, etc.) y cuantitativas discretas (por ejemplo, número de hermanos: 3, 2; cantidad de goles: 2, 4, 5, etc.), así como también el comportamiento del conjunto de datos, a través de pictogramas verticales y horizontales (cada símbolo representa más de una unidad), gráficos de barras con escala dada (múltiplos de 10), la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como punto de equilibrio.	Las acciones no describen el aspecto de la incertidumbre.	Representa problemas, situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos educativos, ocupacionales o laborales con la probabilidad clásica y de frecuencia relativa con ensayos de 100 y con su espacio muestral. Asimismo, relaciona las características de una población en estudio con variables cualitativas y cuantitativas discretas y las organiza en tablas de frecuencia simple, pictogramas y gráficos de barra, en situaciones de interés o un tema de estudio.

<p>Expresa su comprensión de la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como punto de equilibrio; así como todos los posibles resultados de la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones “seguro”, “más probable” y “menos probable”.</p> <p>Lee gráficos de barras con escala, tablas de doble entrada y pictogramas de frecuencias con equivalencias, para interpretar la información del mismo conjunto de datos contenidos en diferentes formas de representación y de la situación estudiada.</p>	<p>El usar las expresiones “más probable” y “menos probable” significa que ya se ha establecido la medida de la posibilidad, sin embargo, en este grado aún no se haya la probabilidad de un suceso.</p>	<p>Expresa, las restricciones y condiciones de una situación o experimento aleatorio. Describe el significado de la media aritmética como reparto y de la moda como el valor de mayor frecuencia. Lee gráficos de barras con escala, tablas de doble entrada y pictogramas de frecuencias con equivalencias, para interpretar la información del mismo conjunto de datos contenidos en diferentes formas de representación y de la situación estudiada. Formula preguntas para cuestionarios según un tema de interés. Selecciona procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, en tablas de frecuencia simple, pictogramas verticales y horizontales (cada símbolo representa más de una unidad), gráficos de barras con escala dada (múltiplos de 10), la moda como la mayor frecuencia.</p>
<p>Recopila datos mediante encuestas sencillas o entrevistas cortas con preguntas adecuadas empleando procedimientos y recursos; los procesa y organiza en listas de datos, tablas de doble entrada o tablas de frecuencia, para describirlos y analizarlos.</p>	<p>Las acciones describen encontrar el espacio muestral.</p>	<p>Selecciona recursos y procedimientos como la simulación, el diagrama de árbol, tablas, diagramas de Venn y otros para hallar el espacio muestral, la probabilidad de un suceso y combinar. Compara la probabilidad de sucesos (por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa o usando fracciones)</p>
<p>Selecciona y emplea procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, las tablas de frecuencia u otros, para determinar la media aritmética como punto de equilibrio, la moda como la mayor frecuencia y todos los posibles resultados de la ocurrencia de sucesos cotidianos.</p>	<p>Las acciones no describen la verificación de la equiprobabilidad o no del espacio muestral.</p>	<p>Verifica la equiprobabilidad o no del espacio muestral. Formula predicciones, conclusiones y toma decisiones con base en la posibilidad de mayor ocurrencia de un suceso con respecto a otro.</p>
<p>Predice la mayor o menor frecuencia de un conjunto de datos, o si la posibilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro. Así también, explica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.</p>	<p>Explica las conclusiones y decisiones que toma a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.</p>	

*Comentario:* Podemos afirmar que hay vacíos en los desempeños de quinto grado con respecto a la incertidumbre, porque; por ejemplo, no se describen las acciones de la incertidumbre para la capacidad “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas y probabilísticas”, y el desempeño no guarda coherencia con la definición de la capacidad.

El uso de las expresiones “más probable” y “menos probable” significa que ya se ha establecido la medida de la posibilidad; sin embargo, en este grado aún no se haya la probabilidad de un suceso y tampoco se describe el espacio muestral o se verifica la equiprobabilidad. Es por ello que no se evidencia una secuencia en las expectativas de aprendizaje; en consecuencia, podemos decir que se puede mejorar la organización de los aprendizajes para mostrar de la combinación de las capacidades que permitan el desarrollo de la competencia y su seguimiento mediante la evaluación, y el docente pueda plantear programaciones coherentes para el trabajo en el aula.

A continuación, se hace el análisis didáctico de los desempeños del sexto grado, y teniendo en cuenta también la tabla 01 y la tabla 02, se presenta una propuesta de mejora.

**Tabla 17.**

*Análisis y Propuesta del contenido didáctico a los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del sexto grado de primaria en lo referido a la estocástica.*

<b>6. ° grado según el Programa Curricular Primaria.</b>	<b>Análisis de los Desempeños de 6. ° Grado y propuesta.</b>	<b>Propuesta (en negrita lo referido a la estocástica).</b>
Representa las características de una población en estudio sobre situaciones de interés o aleatorias, asociándolas a variables cualitativas (por ejemplo: vóley, tenis) y cuantitativas discretas (por ejemplo: 3, 4, 5 hijos), así como también el comportamiento del conjunto de datos, a través de gráficos de barras dobles, gráficos de líneas, la moda y la media aritmética como reparto equitativo. • Determina todos los posibles resultados de una situación aleatoria a través de su probabilidad como fracción.	Se pide el espacio muestral y la probabilidad como fracción, sin embargo, en este grado los estudiantes ya trabajan los decimales hasta el centésimo y los porcentajes usuales, por tal razón pueden expresar la probabilidad como fracción, decimal y porcentajes usuales. Trabajar con un espacio muestral finito.	Representa problemas, situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos educativos, ocupacionales o laborales con la probabilidad clásica y de frecuencia relativa con ensayos hasta 300 y con su espacio muestral. Relaciona las características de una población en estudio sobre situaciones de interés o aleatorias con variables cualitativas y cuantitativas discretas; también relaciona el comportamiento del

Expresa su comprensión de la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como reparto equitativo; así como todos los posibles resultados de una situación aleatoria en forma oral usando las nociones “más probables” o “menos probables”, y numéricamente. Ejemplo: *El estudiante podría decir: “En dos de los cinco casos, el resultado es favorable: 2/5”.*

Lee tabla de doble entrada y gráfica de barras dobles, así como información proveniente de diversas fuentes (periódicos, revistas, entrevistas, experimentos, etc.), para interpretar la información que contienen considerando los datos, las condiciones de la situación y otra información que se tenga sobre las variables. También, advierte que hay tablas de doble entrada con datos incompletos, las completa y produce nueva información.

Recopila datos mediante encuestas sencillas o entrevistas cortas con preguntas adecuadas empleando procedimientos y recursos; los procesa y organiza en tablas de doble entrada o tablas de frecuencia, para describirlos y analizarlos.

Selecciona y emplea procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, las tablas de frecuencia u otros, para determinar la media aritmética como reparto equitativo, la moda, los casos favorables a un suceso y su probabilidad como fracción.

Las acciones no describen el trabajo de los sucesos dependientes e independientes.

Las acciones solo describen encontrar el espacio muestral y la probabilidad como fracción.

conjunto de datos con datos organizados en tablas de frecuencia simple y acumulada, gráficos de barras dobles, gráficos de líneas, la moda y la media aritmética como reparto equitativo.

Expresa, las restricciones y condiciones de una situación o experimento aleatorio y la noción de cuando un suceso es dependiente, independiente y exhaustivo, y la noción de variable aleatoria con juegos y experimentos, y la determinación de una muestra al azar. Interpreta la probabilidad de un suceso relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Asimismo, interpreta los conceptos de sucesos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.

Describe el significado la media aritmética como reparto y como punto de equilibrio.

Lee tablas de doble entradas y gráficas de barras dobles, así como información proveniente de diversas fuentes (periódicos, revistas, entrevistas, experimentos, etc.), para interpretar la información que contienen considerando los datos, las condiciones de la situación y otra información que se tenga sobre las variables. También, advierte que hay tablas de doble entrada con datos incompletos, las completa y produce nueva información.

Formula preguntas para cuestionarios según un tema de interés.

Selecciona procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, en tablas de frecuencia simple, pictogramas verticales y horizontales (cada símbolo representa más de una unidad), gráficos de barras con escala dada (múltiplos de 10), la moda como la mayor frecuencia.

Selecciona recursos y procedimientos como la

---

<p>Predice la tendencia de los datos o la ocurrencia de sucesos a partir del análisis de los resultados de una situación aleatoria. Así también, justifica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.</p>	<p>Las acciones describen la predicción de la ocurrencia de sucesos a partir del análisis de los resultados de una situación aleatoria.</p>	<p>simulación, el diagrama de árbol, tablas, diagramas de Venn y otros para hallar el espacio muestral, la probabilidad de un suceso, los resultados favorables y combinar. Opera nocionalmente con sucesos encuentra el suceso unión, suceso intersección, suceso complemento y sucesos exhaustivos. Compara la probabilidad de sucesos (por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa. Verifica la equiprobabilidad o no del espacio muestral. Formula predicciones, conclusiones y toma decisiones con base en la probabilidad de un suceso. Pronostica la tendencia de los datos en gráficas o la ocurrencia de sucesos a partir del análisis de los resultados de una situación aleatoria. Pronostica si la probabilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro. Justifica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.</p>
--	---	--

---

*Comentario:* Podemos afirmar que hay vacíos en las expectativas de aprendizaje en sexto grado con respecto a la incertidumbre, porque se trabaja el espacio muestral y la probabilidad como fracción. Sin embargo, en este grado los estudiantes ya trabajan los decimales hasta el centésimo y los porcentajes usuales; por tal razón, pueden expresar la probabilidad como fracción, decimal y porcentajes usuales.

La capacidad “Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos” se define en el Programa Curricular del nivel primario como “es comunicar su comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en relación a la situación. Leer, describir e interpretar información estadística contenida en gráficos o tablas provenientes de diferentes fuentes”. (MINEDU, 2016, p. 263).

Si bien se interpreta la información estadística, no se explicita la interpretación de los casos favorables y el total de casos posibles en la probabilidad de un suceso; en consecuencia, podemos decir que se puede mejorar la organización de los aprendizajes para que se impacte de mejor manera en el diseño y organización del trabajo de aula en este grado, y sobre todo en la evaluación.

#### **4.4.2 Análisis didáctico del fascículo rutas del aprendizaje del V ciclo.**

Se analizará los tratamientos didácticos del sentido estocástico de “Las Rutas del Aprendizaje, versión 2015, ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? V ciclo. Área Curricular Matemática. 5. ° y 6. ° grados de Educación Primaria “del Ministerio de Educación.

Para dicho análisis se tendrá en cuenta la teoría de la transposición didáctica de Chevallard, quien propone que el docente debe buscar estrategias para que el saber sabio o referencial sea asequible a los estudiantes.

Al respecto, el capítulo 3 de las rutas de aprendizaje mencionada, está referido a las orientaciones didácticas (p. 81-131) y es motivo de consulta de los docentes en esta área para el V ciclo. Asimismo, el acápite 3.4 presenta estrategias referidas a la competencia de gestión de datos e incertidumbre. En el apartado 3.4.1. presenta estrategias para resolver problemas estadísticos y en el apartado 3.4.2. (p.130-131) presenta recursos para plantear experimentos aleatorios.

Para el análisis nos ocuparemos del apartado 3.4.2. (p.130-131) pues presenta sugerencias de materiales y propuesta de actividades referidos a la estocástica. Veamos:

##### ***A) Respecto al saber sabio o de referencia***

No se aborda los conceptos referidos a la estocástica.

## B) Respecto al saber a enseñar

**Tabla 18.**

*Análisis del saber a enseñar del fascículo rutas del aprendizaje del V ciclo referido a la estocástica.*

### Lo que se presenta en la Ruta de Aprendizaje

Del mismo modo, que hay materiales para los números y la geometría también es necesario contar con materiales para generar y plantear experimentos aleatorios asociados a las probabilidades. A continuación, algunas sugerencias de materiales y propuesta de actividades. (p.130).



### Hallazgos

- Se señalan materiales didácticos a los dados, juego de cartas, bolas de diferentes colores, ruletas y monedas.
- Uso: Generar y plantear experimentos aleatorios asociados a las probabilidades.

### Dados

Existen dados de diferentes formas: los cúbicos, tetraédricos, dodecaédricos, etc. Con ellos puedes generar experimentos aleatorios para determinar la probabilidad.

**Actividad:** Al lanzar dos dados, ¿qué parejas de números podemos obtener?, ¿Cuántas son en total?

- Propiciar que el niño experimente libremente, para que pueda descubrir las propiedades matemáticas al respecto.
- Permite que registren los datos de diferentes formas: tablas, diagrama de árbol, etc.
- Que socialicen los resultados.
- Generar la construcción de los sucesos en pares ordenados: (2,5), (5,2).
- Realiza otras preguntas: ¿qué posibilidades tenemos de sacar como suma 1?, ¿qué posibilidades tenemos de sacar como suma un número comprendido entre 2 y 12 incluidos?

Estas pregunta dan lugar a suceso imposible y suceso seguro.



- Conceptos a enseñar: espacio muestral, sucesos, suceso imposible, suceso seguro.
- Representación: pares ordenados, diagrama de árbol, tablas.
- Recurso: dados de diferentes formas: cúbicos, tetraédricos, dodecaédricos, etc.

### Juego de cartas

**Actividad 1:** ¿Cuál de las siguientes experiencias se consideran como aleatorias y cuáles no:

- Sacar una carta y observar si es de corazones.
- Todas las cartas son reyes.
- Si saco una carta es seguro que sea menor que 12.

- Conceptos a enseñar: experimento aleatorio y experimento no aleatorio.
- Recurso: juego de cartas.

(p. 131)

### Bolas de diferentes colores

**Actividad 1:** En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas se deben sacar sucesivamente para estar seguro de obtener una bola de cada color?

**Actividad 2:** En una bolsa tenemos 10 bolas, de las cuales 2 son blancas, 4 azules, 3 verdes y una negra. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca?, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola azul?

- Conceptos a enseñar: suceso seguro, probabilidad como fracción.
- Recurso: bolas de diferentes colores.

(p. 131)

### Ruletas

**Actividad 1:** Construye ruletas con dos, tres, cuatro o más sectores con colores distintos y otra con dos colores iguales.

**Actividad 2:** En la ruleta de la derecha:

- ¿Es seguro caer en un color?
- ¿Qué es más probable?
- ¿Cuál es la probabilidad de caer en un color en una ruleta de 5 sectores, donde 2 sectores son rojo, 2 amarillos y uno es blanco?



- Conceptos a enseñar: suceso seguro, probabilidad como fracción, más probable.
- Recurso: ruletas de con dos, tres, cuatro o más sectores con colores distintos y otra con dos colores iguales.

(p. 131)

### Monedas

**Actividad 1:** Se lanza una moneda tres veces seguidas:

- ¿Es seguro sacar cara?
- ¿Es seguro sacar sello?
- Experimenta varias veces.
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener más resultados con cara?

**Actividad 2:** ¿Cuáles son todos los posibles sucesos al lanzar una moneda al aire?

**Actividad 3:** ¿Cuáles son todos los posibles sucesos al lanzar dos monedas al aire?

- Conceptos a enseñar: suceso seguro, más probable, espacio muestral.
- Recurso: monedas.

(p. 131)

*Comentario:* Los materiales propuestos son dados, monedas, ruletas, bolas de diferentes colores y juego de cartas; pero estos no han sido diseñados con fines educativos; por tanto, no estaría en la categoría de materiales educativos sino más bien en el de recursos didácticos.

Cabe destacar que los materiales y recursos didácticos son parte de los organizadores curriculares con que se planifica la enseñanza en el aula y son importantes, porque, a partir de su manipulación, los estudiantes pueden hacer abstracciones y darles sentido a los conceptos matemáticos.

Las actividades propuestas en su mayoría son estructuradas y de baja demanda cognitiva pasando por las memorísticas y de procedimientos sin conexiones. Las mismas que plantean enseñar los conceptos de: experimento no aleatorio, espacio muestral, suceso, suceso seguro, suceso imposible, probabilidad como fracción, comparación de probabilidades con más probable, y a través de representaciones como, pares ordenados, diagrama de árbol y tablas. El abordaje de las ideas estocásticas fundamentales es mínimo.

Debemos agregar que no se menciona nada respecto a la evaluación y cómo se debe organizar los espacios educativos para este trabajo. En consecuencia, por todo lo antes dicho podemos decir que las orientaciones son insuficientes para que el docente plantee, por ejemplo, un diseño de unidad didáctica para una enseñanza efectiva en lo referido a la estocástica.

#### **4.4.3 Praxeología propuesta por el texto escolar del quinto grado de educación primaria.**

El texto de la referencia se denomina:

*Libro de Matemática 5*, para el quinto grado de primaria, ha sido desarrollado, diseñado editado en el Departamento de Ediciones El Nosedal S. A. C., siendo los autores el siguiente equipo:

Rosa Cuba Samamé

Isabel Dos Reis Montagnoli de Herrera

Filena Martel Orrego

Zenobia Lapa Huincho

Este es el texto oficial para los estudiantes del quinto grado de primaria de nuestro país, aprobado por el Ministerio de Educación del Perú en el año 2012, cuya distribución fue gratuita a nivel nacional y se conserva en el banco del libro de las instituciones educativas para su gestión y uso.

#### 4.4.3.1 Tareas ( $Tr_i$ ), técnicas ( $\tau_i$ ), tecnologías ( $\Theta_i$ ) y teorías ( $\Theta_i$ ) de estudio.

$T_{r1}$ : Leer la historieta y responder preguntas de opinión sobre posible, probable y más probable.

$T_{r1}$ : Juana y Raquel viven cerca y todos los días caminan juntas hasta el colegio. En el camino, se divierten haciéndose preguntas.

Hoy día se les ocurrió hablar de lo que es posible y de lo que no es posible.

Por turno, cada una debe decir algo que es posible y algo que no es posible.

Comienza Juana, sigue Raquel.



¿Tú qué opinas?

¿Existe algo más posible que otro; o es más probable que otro? ¿Por qué?

Si una cosa es probable que ocurra, con seguridad es posible que ocurra, pero ¿una cosa que es posible que ocurra siempre será probable que ocurra?

Que las dos amigas lleguen temprano al colegio o lleguen tarde son dos cosas posibles, pero ¿cuál de las dos cosas es más probable que la otra? ¿Por qué?

#### *Análisis de técnicas de la Tarea 1:*

$\tau_{11}$ : Escribe dando razones de su postura que la expresión correcta es *más probable que otro* y no, *más posible que otro*.

$\tau_{21}$ : Escribe que para que un suceso sea probable es necesario que sea posible que ocurra.

$\tau_{31}$ : Escribe dando razones que es más probable que las dos amigas lleguen temprano al colegio porque ambas salen juntas con dirección al colegio.

#### *Análisis de tecnologías de la Tarea 1:*

$\theta_{11}$ : Un suceso es probable cuando, además de ser posible, se puede medir o comparar su grado de posibilidad. (pág.202).

$\theta_{21}$ : Si una situación tiene más posibilidades que otra, se dice que es más probable. (pág.203).

#### *Análisis de teorías de la Tarea 1:*

$\Theta_{11}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Posible e imposible.
- Definición de probabilidad.

Planteamiento del cálculo de probabilidades.

- Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr<sub>2</sub>: Presentar ejemplos de sucesos deterministas.

Tr<sub>2</sub>: Presenta tres situaciones de tu vida cotidiana que sean sucesos deterministas.

*Análisis de técnicas de la tarea 2:*

$\tau_{12}$ : Escribe tres situaciones de su vida cotidiana que son sucesos deterministas.

*Análisis de tecnologías de la tarea 2:*

$\theta_{12}$ : En la vida diaria, la información se presenta de dos formas: de manera bien determinada, sin posibilidad de cambiar, con valores fijos... (pág.194).

$\theta_{22}$ : Un suceso determinista es un experimento o fenómeno que da lugar a un resultado cierto o seguro (pág.202).

*Análisis de teorías de la tarea 2:*

$\Theta_{12}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

➤ Tipos de situación

a) Situación determinista.

b) Situación de incertidumbre o aleatoria.

Tr<sub>3</sub>: Presentar ejemplos de sucesos no deterministas.

Tr<sub>3</sub>: Presenta tres situaciones de tu vida cotidiana que no sean sucesos deterministas.

*Análisis de técnicas de la tarea 3:*

$\tau_{13}$ : Escribe en palabras tres situaciones de su vida cotidiana que no son sucesos deterministas.

*Análisis de tecnologías de la tarea 3:*

$\theta_{13}$ : En la vida diaria, la información se presenta de ... manera indeterminada, con probabilidades de adoptar valores diferentes según las circunstancias (pág.194).

*Análisis de teorías de la tarea 3:*

$\Theta_{13}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Situaciones aleatorias (no deterministas o de incertidumbre)
  - a) Situaciones aleatorias no reproducibles.
  - b) Situaciones aleatorias reproducibles.
    - Componentes: Contexto, restricciones, condiciones y espacio muestral.

Tr<sub>4</sub>: Leer la historieta y responder preguntas sobre posible y más probable.

Tr<sub>4</sub>:

Regresamos ahora a la conversación de las amigas Juana y Raquel, de la página 193.

Los sucesos posibles son aquellos que pueden ocurrir, mientras que los sucesos imposibles son aquellos que de ninguna manera pueden ocurrir.

Por ejemplo, si hoy es lunes, es imposible que mañana sea miércoles, porque de ninguna manera al lunes le sigue el miércoles.

Un suceso es probable cuando, además de ser posible, se puede medir o comparar su grado de posibilidad.

Es probable que Juana y Raquel lleguen temprano al colegio, como también es probable que estas amigas lleguen tarde al colegio. Pero, de las dos cosas, es más probable que lleguen temprano, porque la mayoría de las veces llegan temprano y muy pocas veces llegan tarde.



¿Es imposible que su mamá deje sin almuerzo a Raquel?

Claro que no, pero puede ocurrir que un día, su mamá no pueda cocinar y la deje sin almuerzo. Es verdad que esto es poco probable, pero es posible.

¿Tú qué opinas?

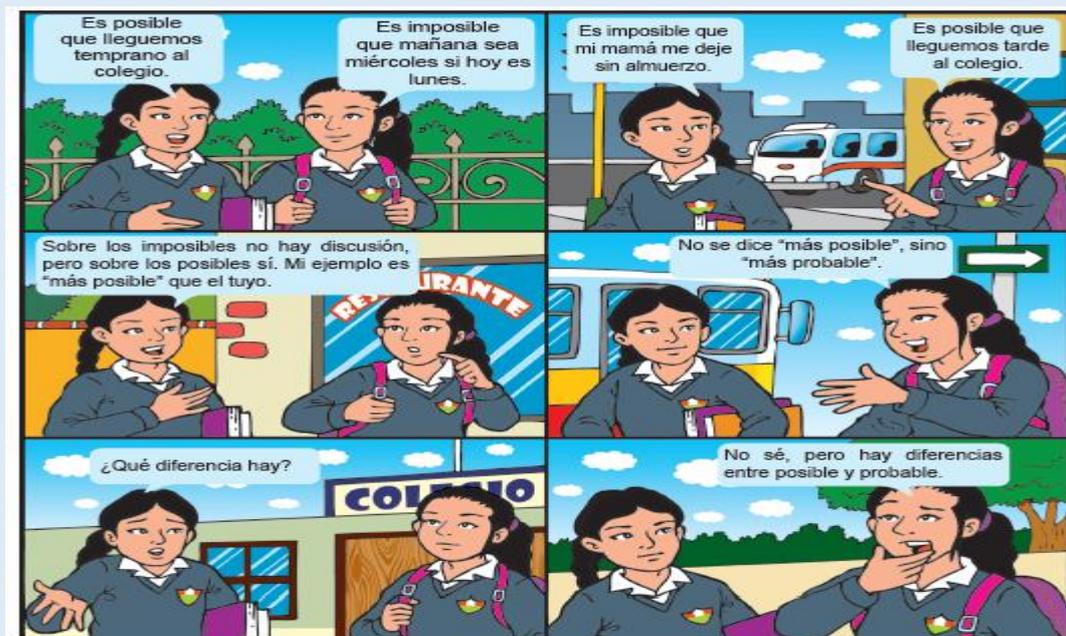
- ¿Es posible que las amigas no lleguen al colegio?
- ¿Qué es más probable: que las amigas lleguen al colegio o que no lleguen al colegio?
- Cuando sales de tu casa para dirigirte al colegio, ¿qué es más probable: que salgas con el pie izquierdo o que salgas con el pie derecho?

Juana y Raquel viven cerca y todos los días caminan juntas hasta el colegio. En el camino, se divierten haciéndose preguntas.

Hoy día se les ocurrió hablar de lo que es posible y de lo que no es posible.

Por turno, cada una debe decir algo que es posible y algo que no es posible.

Comienza Juana, sigue Raquel.



¿Tú qué opinas?

#### *Análisis de técnicas de la Tarea 4:*

$\tau_{14}$ : Escribe que si es posible que las amigas no lleguen al colegio.

$\tau_{24}$ : Escribe que es más probable que las amigas lleguen al colegio a que no lleguen al colegio.

$\tau_{34}$ : Escribe que tiene igual probabilidad de salir de casa con el pie izquierdo o con el pie derecho.

#### *Análisis de tecnologías de la tarea 4:*

$\theta_{14}$ : Los sucesos posibles son aquellos que pueden ocurrir... (pág.202).

$\theta_{24}$ : Si una situación tiene más posibilidades que otra, se dice que es más probable...(pág.203).

$\theta_{34}$ :... si ambas (situaciones) tienen las mismas posibilidades, se dice que son igualmente probables. (pág.203).

*Análisis de teorías de la tarea 3:*

$\Theta_{14}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Suceso: Posible e imposible.
- Planteamiento del cálculo de probabilidades.
  - Planteamiento subjetivo.
  - Planteamiento clásico.
  - Planteamiento por frecuencia relativa.
- Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr<sub>5</sub>: Calcular la probabilidad de un suceso y comparar.

Tr<sub>5</sub>: Juan y Pedro tienen los bolsillos llenos de bolitas de colores. Juan tiene 6 bolitas rojas, 3 verdes y 1 azul, mientras que Pedro tiene 9 rojas, 4 verdes y 2 azules.

- Si los dos meten las manos al bolsillo y sin mirar sacan una bolita, es posible que esta sea roja. Pero, ¿cuál de los dos tiene más posibilidades de extraer una bolita roja?
- ¿Y qué es más probable: que Juan saque una bolita verde o que Pedro saque una verde?
- ¿Es más probable que Juan saque una bolita azul o que Pedro saque una azul?

*Análisis de técnicas de la tarea 5:*

$\tau_{15}$ : Extrae una bolita roja, sin ver, de bolsillos llenos con bolitas de colores.

$\tau_{25}$ : Escribe la cantidad total de bolitas que hay en cada bolsillo.

$\tau_{35}$ : Escribe cada suceso, como una fracción, donde el numerador representa la cantidad de bolita roja de un bolsillo y el denominador la cantidad total de bolitas de un bolsillo.

$\tau_{45}$ : Escribe la probabilidad de que sean rojas las bolitas extraídas sumando los sucesos posibles.

$\tau_{55}$ : Escribe la probabilidad de que sean rojas las bolitas de ambos bolsillos utilizando las fracciones equivalentes.

$\tau_{65}$ : Escribe que ambas probabilidades, de que Juan saque una bolita roja y que Pedro saque una bolita roja, son igualmente probables.

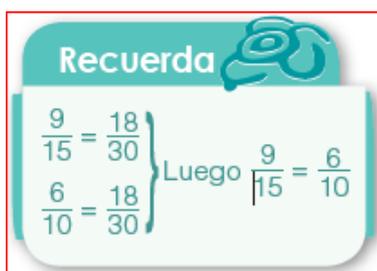
$\tau_{75}$ : Escribe que es más probable que Juan saque una bolita verde a que Pedro lo haga.

$\tau_{85}$ : Escribe que es más probable que Pedro saque una bolita azul a que Juan lo haga.

*Análisis de tecnologías de la tarea 5:*

$\theta_{15}$ : En la vida diaria, la información se presenta de ... manera indeterminada, con probabilidades de adoptar valores diferentes según las circunstancias (pág.194).

$\theta_{25}$ :



$\theta_{35}$ :... si ambas (situaciones) tienen las mismas posibilidades, se dice que son igualmente probables. (pág.203).

$\theta_{45}$ : Si una situación tiene más posibilidades que otra, se dice que es más probable. (pág.203).

$\Theta_{55}$ :

$$\frac{3}{10} > \frac{4}{15} \text{ porque } \frac{3}{10} = \frac{9}{30} \text{ y } \frac{4}{15} = \frac{8}{30}$$

*Análisis de teorías de la tarea 5:*

$\Theta_{15}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

➤ Situaciones aleatorias reproducibles.

- Experimentos aleatorios.

A) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

B) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

C) Experimentos aleatorios de espacio muestral equiprobable.

Tr<sub>6</sub>: Escribir números del 1 al 10 en trozos de papel, predecir, extraer uno para responder preguntas y explicar sobre más probable.

Tr<sub>6</sub>: Escriban en trozos de papel los números del 1 al 10. Doblen los diez papelitos, pónganlos en una bolsa, mézclenlos bien, y extraigan un papelito.

¡No lo abran todavía!

Respondan las siguientes preguntas y en cada caso expliquen su respuesta.

- a) ¿Qué es más probable: que el número que salga sea par o impar?
- b) ¿Qué es más probable: que sea divisor de 5 o divisor de 8?
- c) Gana el que saca el número mayor. Tú miras tu papelito y es el 7. Luego Pedro saca su papelito. ¿Qué es más probable: que ganes tú a que gane Pedro?
- d) ¿Habrá algún caso en que Pedro y tú hayan extraído números con los cuales sea igualmente probable que gane uno o que gane otro?

*Análisis de técnicas de la tarea 6:*

$\tau_{16}$ : Escribe en trozos de papel números del 1 al 10.

$\tau_{26}$ : Coloca todos los papelitos doblados en una bolsa y los mezcla bien.

$\tau_{36}$ : Extrae un papelito enumerado y sin abrir, escribe dando razones justificadas, que es igualmente probable que el número que salió sea par o impar.

$\tau_{46}$ : Escribe que es más probable que el número extraído sea divisor de 8 que de 5 porque hay más divisores de 8 que de 5 en los diez números.

$\tau_{56}$ : Escribe dando razones justificadas que es menos probable que gane al extraer un papelito enumerado y sin abrirlo, sabiendo que ya salió el número 7.

$\tau_{66}$ : Escribe dando razones justificadas, que los números extraídos son igualmente probables para que gane Pedro o gane yo.

*Análisis de tecnologías de la tarea 6:*

$\theta_{16}$ :... si ambas (situaciones) tienen las mismas posibilidades, se dice que son igualmente probables. (pág.203).

$\theta_{6}$ :...Si una situación tiene más posibilidades que otra, se dice que es más probable...(pág.203).

$\theta_{36}$ :... Si tiene menos posibilidades (las situaciones), es menos probable...(pág.203).

*Análisis de teorías de la tarea 6:*

$\Theta_{16}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Situaciones aleatorias reproducibles
  - Experimentos aleatorios.
    - A) Componentes:
      - Contexto.
      - Restricciones.
      - Condiciones.
      - Espacio muestral.
      - Sucesos.
    - B) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.
    - C) Experimentos aleatorios de espacio muestral equiprobable.
    - D) Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr7: Clasificar sucesos deterministas y no deterministas.

Tr7: En el casillero correspondiente a cada suceso, pon una marca  según consideres el suceso.

Suceso	Determinista	No determinista
Que un ángulo recto mida 90°.		
Que haya un número más grande que otro.		
Que al lanzar un dado el resultado sea par.		

*Análisis de técnicas de la tarea 7:*

$\tau_{17}$ : Marca con  en la celda correspondiente a cada suceso para indicar si es deterministas y no deterministas.

*Análisis de tecnologías de la tarea 7:*

$\theta_{17}$ : En la vida diaria, la información se presenta de dos formas: de manera bien determinada, sin posibilidad de cambiar, con valores fijos; y de manera indeterminada, con probabilidades de adoptar valores diferentes según las circunstancias (pág.194).

$\theta_{27}$ : Un suceso determinista es un experimento o fenómeno que da lugar a un resultado cierto o seguro (pág.202).

*Análisis de teorías de la tarea 7:*

$\Theta_{17}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Tipos de situación.
  - c) Situación determinista.
  - d) Situación de incertidumbre o aleatoria.

#### 4.4.3.2 Mapas de tareas y técnicas.

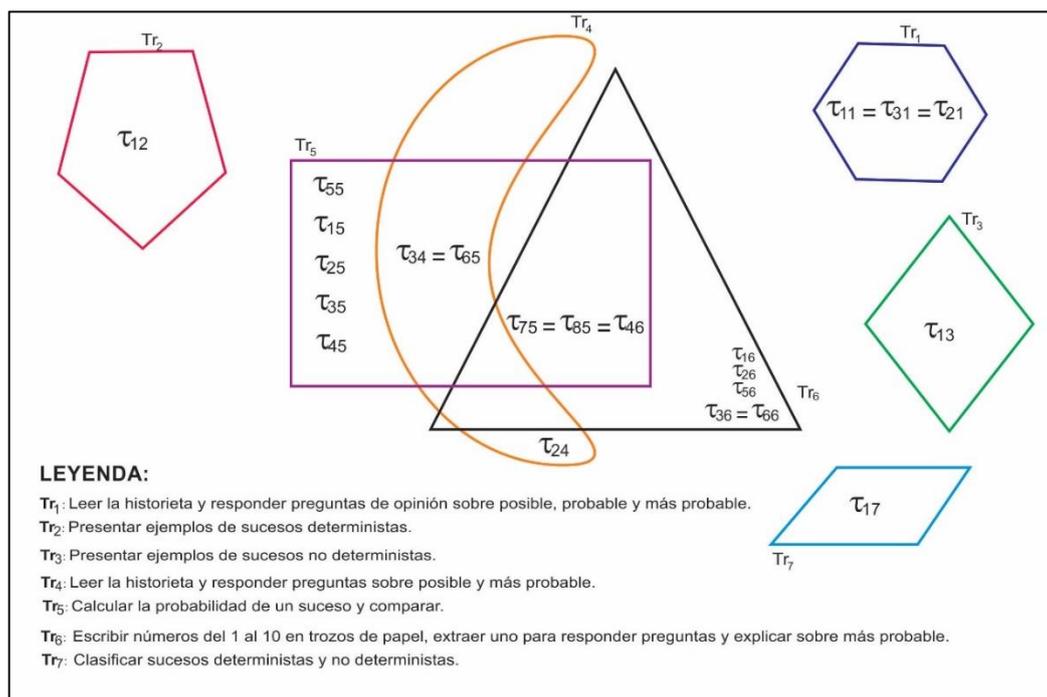


Figura 16. Mapa de tareas y técnicas del texto de quinto grado primario referido a la estocástica

#### 4.4.3.3 Descripción global y razón de ser del concepto de probabilidad propuesto por el texto.

El abordaje del sentido estocástico en el quinto grado de primaria está dado por la comparación de la probabilidad con más probable e igualmente probable.

#### 4.4.3.4 Hechos o fenómenos didácticos $(\varphi_i)$ .

**Tabla 19.**

*Análisis de tareas del texto de quinto grado sobre el sentido estocástico y hallazgos parciales*

<b>TAREA</b>	<b>LO QUE HAY</b> (acciones, conceptos)	<b>CARACTERÍSTICAS DE LA TAREA</b> (propósito, destinatario, incertidumbre, restricciones, repertorio de recursos cognitivos, procesos)	<b>DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO DE LA TAREA</b> (personal; educativa, ocupacional o laboral; pública, científica)	<b>DEMANDA COGNITIVA DE LA TAREA</b> (memorización, procedimientos sin conexiones, procedimientos con conexiones, hacer estocástica)	<b>HALLAZGOS PARCIALES</b>
Tr <sub>1</sub>	<p>Leer la historieta y responder preguntas de opinión sobre posible, probable y más probable.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Posible.</li> <li>- Probable.</li> <li>- Comparación con más probable.</li> </ul>	<p>No tiene destinatario.</p> <p>No posee incertidumbre ya que la tarea es estructurada.</p> <p>La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.</p>	Personal	<p>Baja demanda. Procedimientos sin conexiones.</p> <p>Porque la justificación que da no tiene sustento ya que la tecnología se aborda en la página 202.</p>	<p>La tarea aparece en la página 193 en la sección, exploro mis saberes, y se retoma la tarea en la pág. 202, donde aparecen las tecnologías respectivas sobre posible y probable. También según el CNEB 2016, en tercer grado se trabaja las nociones de “seguro”, “posible” e “imposible”, y en cuarto grado, las nociones de “seguro”, “más probable” y “menos probable”; lo cual calza con el texto (2012) aunque en este grado (quinto grado) se debe trabajar, según los desempeños del Programa Curricular: “seguro”, “más probable” y “menos probable”.</p>
Tr <sub>2</sub>	<p>Presenta ejemplos de sucesos deterministas.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Suceso determinista.</li> </ul>	<p>No tiene destinatario. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso.</p>	Personal	<p>Alta demanda. Procedimientos con conexiones. Porque interconecta el concepto con su realidad para dar ejemplos.</p>	<p>La tecnología, <math>\theta_{22}</math>: Un suceso determinista es un experimento o fenómeno que da lugar a un resultado cierto o seguro (pág.202). Se entiende al suceso determinista como experimento o fenómeno y no se habla de situación determinista, sin embargo la tarea pide situaciones de su vida cotidiana que sean sucesos deterministas. Entonces debe quedar claro lo que es situación, experimento, fenómeno y suceso determinista para evitar confusiones en el estudiante.</p>
Tr <sub>3</sub>	<p>Presenta ejemplos de sucesos no deterministas.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Suceso no determinista o aleatorio.</li> </ul>	<p>No tiene destinatario. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso.</p>	Personal	<p>Alta demanda. Procedimientos con conexiones. Porque interconecta el concepto con su realidad para dar ejemplos.</p>	<p>La tecnología, <math>\theta_{13}</math>: En la vida diaria, la información se presenta de ... manera indeterminada, con probabilidades de adoptar valores diferentes según las circunstancias (pág.194).</p> <p>Aquí se pretende dar una idea de situación aleatoria pero no queda claro en tanto se entiende que la información se da en la vida de manera indeterminada, es decir una información no definida. La palabra indeterminada no es adecuado para el grado.</p>

					<p>No se realciona con la incertidumbre y con el conjunto de los posibles resultados (espacio muestral), pues es lo único que se puede saber.</p> <p>Tampoco se visualiza las ideas sobre situaciones de incertidumbre repetibles, y no repetibles como por ejemplo el nacimiento de un niño cuando la madre no se ha sacado ninguna ecografía para saber el sexo del bebé.</p>
					
Tr <sub>4</sub>	<p>Leer la historieta y responder preguntas sobre, posible y más probable.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Posible.</li> <li>- Comparación con más probable.</li> </ul>	<p>No tiene destinatario. No posee incertidumbre ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.</p>	Personal	<p>Baja demanda. Tarea de procedimientos sin conexiones. Porque las tres preguntas se centran en obtener una respuesta correcta comparando y es inmediata.</p>	<p>(Osorio 2012, p. 26) Esta tarea retoma la historieta de la tarea 1 de la p.193.</p>
Tr <sub>5</sub>	<p>Calcular la probabilidad de un suceso y comparar.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad como fracción.</li> <li>- Comparación con más probable.</li> </ul>	<p>No tiene destinatario. No posee incertidumbre ya que la tarea es estructurada.</p> <p>La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.</p>	Personal	<p>Baja demanda. Tarea de procedimientos sin conexiones. Porque las tres preguntas se centran en obtener una respuesta correcta y es inmediata.</p>	<p>En la primera pregunta se dice: ¿cuál de los dos tiene más posibilidades de extraer una bolita roja?</p> <p>Anteriormente se ha establecido cómo se debe decir: más probable y no “más posibilidades” (más posible), esto complica la comprensión del niño.</p> <p>No se ha trabajado o hablado de: experimentos simples, experimentos compuestos, sucesos independientes, la equiprobabilidad de los resultados. En esta tarea se presentan sucesos compuestos que tienen que ver con todo lo antes señalado pues, en primera instancia no se puede aplicar Laplace debido a que los resultados posibles no tienen la misma probabilidad, por ello hay que hacer una transformación en la composición de los bolsillos mediante la simulación de urnas para asegurar la equiprobabilidad sin alterar la probabilidad de obtener una bolita roja, verde o azul em ambas urnas (bolsillos). Esto no se hace ver al niño, más por el contrario se hacen procedimientos sin conexiones. Esta tarea es potente, pues abarca varias ideas estocásticas fundamentales como: la probabilidad como normalización de nuestras creencias, el conjunto de todas las posibilidades, la equidistribución y simetría, independencia y la simulación; todo ello se puede abordar de</p>

Tr <sub>6</sub>	<p>Escribir números del 1 al 10 en trozos de papel, predecir, extraer uno para responder preguntas y explicar sobre más probable.</p> <p>- Comparación con Más probable.</p>	No tiene destinatario.	Personal	<p>Alta demanda. Tarea de procedimientos con conexiones. Porque interconecta conceptos y procedimientos. Verifica el grado de creencia y explica.</p>	<p>manera intuitiva y de manera razonada.</p> <p>En esta tarea no se da la indicación de sacar los papelitos sin mirar, esto es importante porque ninguno de los sucesos posibles debe tener mayor ventaja que otro (simetría); además se debe hacer reflexionar sobre esto.</p> <p>Las técnicas 1 y 2:  <math>\tau_{16}</math>: Escribe en trozos de papel números del 1 al 10.  <math>\tau_{26}</math>: Coloca todos los papelitos doblados en una bolsa y los mezcla bien.</p> <p>Aquí se trabaja con el concepto de espacio muestral pero este concepto no se da; tampoco se da el concepto de suceso, sin embargo, en el texto de sexto grado este concepto se da: “vamos a llamar suceso a todo acontecimiento que puede ocurrir o no...” (p.198).</p> <p>La tarea se plantea en la sección, <i>Evalúo mis aprendizajes</i>. Es la única tarea que se plantea en esta sección. Es una tarea no recomendable.</p>
Tr <sub>7</sub>	<p>Clasificar sucesos deterministas y no deterministas</p> <p>- Sucesos deterministas.  - Sucesos no deterministas.</p>	<p>No tiene destinatario. No posee incertidumbre ya que la tarea es estructurada.</p>	Personal	<p>Baja demanda. Tarea de memorización. Porque debe recordar los conceptos.</p>	<p>La tarea se plantea en la sección, <i>Evalúo mis aprendizajes</i>. Es la única tarea que se plantea en esta sección. Es una tarea no recomendable.</p>
<p>La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.</p>					

Se ha analizado la reconstrucción de la organización matemática en el texto de quinto grado y podemos dar cuenta de los siguientes hechos didácticos:

$\varphi_1$ : Las tareas no reúnen todas las características planteadas por Wiggins para ser una tarea auténtica.

*Indicadores:*

- El 100% de las tareas (7 tareas) no tiene destinatario; es decir, no están dirigidas a interlocutores reales que puedan percibir sus resultados y opinar sobre ellos.
- El 57% de las tareas (4 tareas de 7) son estructuradas.
- El 86% de las tareas (6 tareas de 7) no dan oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso.

- El 57% (4 tareas de 7) no tienen un repertorio amplio de recursos cognitivos ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.

$\varphi_2$ : Las tareas se describen en contextos personales.

*Indicadores:*

- Todas las tareas afectan de manera inmediata al estudiante, pues están relacionadas con sus actividades diarias o cotidianas.
- No hay tareas en situaciones: educativas o de contexto escolar, público o propio de la comunidad donde el estudiante está inmerso.

$\varphi_3$ : La mayoría de las tareas son de baja demanda cognitiva.

*Indicadores:*

- El 57% de las tareas (4 tareas de 7) es de baja demanda cognitiva, de las cuales el 75% son de procedimientos sin conexiones y el 25% corresponde a memorización.
- El 43% de las tareas (3 tareas de 7) son de alta demanda cognitiva: procedimientos con conexiones.
- No existen tareas para hacer estocástica.

$\varphi_4$ : Existen tecnologías poco claras.

*Indicadores:*

- La tarea 1 aparece en la página 193 en la sección “exploro mis saberes”, y se retoma esta tarea en la pág. 202, donde aparecen las tecnologías respectivas sobre posible y probable. También, según el CNEB 2016, en tercer grado se trabaja las nociones de “seguro”, “posible” e “imposible”; y en cuarto grado, las nociones de “seguro”, “más probable” y “menos probable”, lo cual calza con el texto (2012) aunque en este grado (quinto grado) se debe trabajar, según el CNEB 2016: “seguro”, “más probable” y “menos probable”.

- La tecnología,  $\theta_{22}$ : Un suceso determinista es un experimento o fenómeno que da lugar a un resultado cierto o seguro (pág.202). Se entiende al suceso determinista como experimento o fenómeno y no se habla de situación determinista; sin embargo, la tarea 2 pide situaciones de su vida cotidiana que sean sucesos deterministas. Entonces, debe quedar claro lo que es situación, experimento, fenómeno y suceso determinista para evitar confusiones en el estudiante.
- La tecnología,  $\theta_{13}$ : En la vida diaria, la información se presenta de ... manera indeterminada, con probabilidades de adoptar valores diferentes según las circunstancias (pág.194). Aquí se pretende dar una idea de situación aleatoria pero no queda claro en tanto se entiende que la información se da en la vida de manera indeterminada, es decir una información no definida. La palabra indeterminada no es adecuada para el grado. No se relaciona con la incertidumbre y con el conjunto de los posibles resultados (espacio muestral), pues es lo único que se puede saber. Tampoco se visualiza las ideas sobre situaciones de incertidumbre repetibles, y no repetibles como por ejemplo el nacimiento de un niño cuando la madre no se ha sacado ninguna ecografía para saber el sexo del bebé.

$\varphi_5$ : Hay tareas y técnicas poco claras y aisladas.

*Indicadores:*

- En la primera pregunta de la tarea 5, se pregunta: ¿cuál de los dos tiene más posibilidades de extraer una bolita roja? Anteriormente se ha establecido cómo se debe decir: más probable y no “más posibilidades” (más posible), esto complica la comprensión del niño. No se ha trabajado o hablado de: experimentos simples, experimentos compuestos, sucesos independientes, la

equiprobabilidad de los resultados. En esta tarea, se presentan sucesos compuestos que tienen que ver con todo lo antes señalado pues, en primera instancia, no se puede aplicar Laplace debido a que los resultados posibles no tienen la misma probabilidad. Por ello, hay que hacer una transformación en la composición de los bolsillos mediante la simulación de urnas para asegurar la equiprobabilidad sin alterar la probabilidad de obtener una bolita roja, verde o azul en ambas urnas (bolsillos). Esto no se hace ver al niño, más, por el contrario, se hacen procedimientos sin conexiones.

Sin embargo, esta tarea abordada de manera intuitiva y razonada es potente, pues abarca varias ideas estocásticas fundamentales como: la probabilidad como normalización de nuestras creencias, el conjunto de todas las posibilidades, la equidistribución y simetría, independencia y la simulación. Lo cual no se hace en el texto.

- En la tarea 6, no se da la indicación de sacar los papelitos sin mirar. Esto es importante, porque ninguno de los sucesos posibles debe tener mayor ventaja que otro (simetría). Además, se debe hacer reflexionar sobre esto.
- La tarea 7 es de memorización, es no recomendable.
- Las técnicas 1 y 2 de la tarea 6:
  - $\tau_{16}$ : Escribe en trozos de papel números del 1 al 10.
  - $\tau_{26}$ : Coloca todos los papelitos doblados en una bolsa y los mezcla bien.

Aquí se evidencia el trabajo con el concepto de espacio muestral pero este concepto no se da. Tampoco se da el concepto de suceso, sin embargo, en el texto de sexto grado este concepto se da: “vamos a llamar suceso a todo acontecimiento que puede ocurrir o no...” (p.198).
- Las técnicas  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$  y  $\tau_{17}$  son aisladas.

$\varphi_6$ : Las ideas estocásticas fundamentales son abordadas mínimamente.

*Indicadores:*

- Se abordan el 17% (2 de 12) de las ideas estocásticas fundamentales, pero con algunas ausencias:
  - La probabilidad como normalización de nuestras creencias, pero aquí no se trabaja lo “seguro”, y lo “menos probable” se aborda de manera ligera, solo una vez (técnica:  $\tau_{57}$ ).
  - El conjunto de todas las posibilidades, pero aquí el trabajo del espacio muestral es mínimo.

$\varphi_7$ : El abordaje de la estocástica en el quinto grado está dado mayormente a comparar probabilidades.

*Indicadores:*

- Las tareas 1, 2, 4, 5 y 6 abordan la comparación de probabilidades.
- Las técnicas  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{24}$ ,  $\tau_{75}$ ,  $\tau_{85}$  y  $\tau_{46}$  corresponden a comparar con más probable; la técnica  $\tau_{57}$  a comparar con menos probable y las técnicas  $\tau_{34}$ ,  $\tau_{65}$  y  $\tau_{66}$  con igualmente probable.

$\varphi_8$ : La observación y el conocimiento de la realidad para asociarlo a su probabilidad y luego interpretarla, carece de conexiones y significado.

*Indicadores:*

- En las tareas 2 y 3, se les pide presentar ejemplos de situaciones de su vida cotidiana que sean sucesos deterministas y no deterministas, y en la tarea 7 les pide clasificar sucesos deterministas y no deterministas.
- No se hace un estudio de la realidad en la que se observe la situación en un contexto determinado para saber si hay incertidumbre o no y a partir de ello

reconocer una situación determinada y una situación aleatoria como división de la realidad. La caracterización de la situación aleatoria no se hace visible (el contexto, las restricciones, las condiciones, el espacio muestral, el suceso simple y compuesto). Asimismo, no se ejemplifican más allá de los juegos de azar las situaciones aleatorias o de incertidumbre reproducible y no reproducible sabiendo que la mayoría de las situaciones que se dan en la vida cotidiana son de incertidumbre. Consecuentemente, al no estar claro lo anterior no podemos asociarle una probabilidad, menos aún interpretar la probabilidad de hechos y sucesos en la realidad que le dio origen.

$\varphi_9$ : Hay una tarea para la evaluación de los aprendizajes

*Indicadores:*

- La tarea 7 se plantea en la sección, *Evalúo mis aprendizajes*. Es una tarea de baja demanda cognitiva, tarea de memorización porque debe recordar los conceptos de sucesos deterministas y no deterministas para hacer la discriminación según los sucesos dados.
- La tarea se resuelve de manera inmediata.

#### ***4.4.3.5 Lo que no hay y podría haber.***

A continuación, presentamos una tabla que nos ayudará a visualizar que es lo que hay en el texto de quinto grado en relación a las ideas estocásticas fundamentales y qué es lo que no hay y podría haber.

**Tabla 20.**

*Lo que hay, lo que no hay y podría haber en el texto de quinto grado en relación a las ideas estocásticas fundamentales*

<b>Ideas estocásticas fundamentales</b>	<b>Lo que hay</b>	<b>Lo que no hay y podría haber</b>
La probabilidad como normalización de nuestras creencias.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “seguro”</li> <li>- “más probable”</li> <li>- “menos probable”</li> <li>- Posibilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Situación o experimento aleatorio: restricciones y condiciones</li> <li>- Noción de sucesos simples.</li> <li>- Noción de sucesos compuestos.</li> <li>- Comparación de probabilidades: por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa usando fracciones. Sucesos igualmente probables.</li> </ul>
El conjunto de todas las posibilidades. Equidistribución y simetría.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Todos los posibles resultados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Espacio muestral.</li> <li>- Equiprobabilidad del espacio muestral.</li> <li>- No equiprobabilidad del espacio muestral.</li> </ul>
Regla de adición de probabilidades.		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Cálculo de la probabilidad del suceso compuesto a partir de sus sucesos simples usando el diagrama de árbol.</li> </ul>
Independencia y regla del producto.		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Condiciones para la regla del producto: sucesos mutuamente excluyentes, sucesos dependientes, sucesos independientes.</li> </ul>
Probabilidad Condicional. Independencia. Combinatoria.		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Noción de suceso dependiente.</li> <li>- Noción de suceso independiente.</li> <li>- Diagrama del árbol para combinar.</li> </ul>
La variable aleatoria.		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Encontrar el número de puntos a conseguir en juegos y experimentos (dados, monedas, otros). (variable aleatoria discreta).</li> </ul>
Las leyes de los grandes números. Muestreo. Simulación.		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad mediante frecuencia relativa: Ensayos hasta 100.</li> <li>- Determina una muestra al azar.</li> <li>- Sustituye convenientemente el experimento de la realidad (el sexo de un recién nacido) por otro experimento al azar (una urna con dos bolas, fichas o tarjetas para representar ambos sexos).</li> </ul>

*Comentario:* Los conceptos que se plantean respecto a la probabilidad resultan insuficientes para tener una idea intuitiva de la probabilidad como normalización de nuestras creencias, pues al respecto su abordaje en el quinto grado está dedicado a comparar probabilidades y aún con la ausencia de sucesos igualmente probables. Podría haber situación o experimento aleatorio: restricciones y condiciones, sucesos simples y

sucesos compuestos, la equiprobabilidad y no equiprobabilidad del espacio muestral, el cálculo de la probabilidad del suceso compuesto a partir de sus sucesos simples, el abordaje intuitivo de sucesos mutuamente excluyentes, sucesos dependientes y sucesos independientes; así como la combinatoria a partir del uso del diagrama del árbol.

También, podría haber el tratamiento intuitivo de la variable aleatoria a partir de encontrar el número de puntos a conseguir en juegos y experimentos (dados, monedas, otros). Asimismo, podría haber el tratamiento intuitivo de las leyes de los grandes números a partir de encontrar la probabilidad mediante la frecuencia relativa con ensayos de hasta 100; el tratamiento del muestreo determinando una muestra pequeña al azar, y la simulación; por ejemplo, sustituyendo convenientemente el experimento de la realidad (el sexo de un recién nacido) por otro experimento al azar (una urna con dos bolas, fichas o tarjetas para representar ambos sexos).

#### **4.4.4 Praxeología propuesta por el texto escolar del sexto grado de educación primaria.**

*Libro de Matemática 6*, para el sexto grado de primaria, ha sido desarrollado, diseñado editado en el Departamento de Ediciones El Nosedal S. A. C., siendo los autores el siguiente equipo:

Isabel Dos Reis Montagnoli de Herrera

Elsa Verónica Sullca Quenallata

Eugenia Val Reyes

Este es el texto oficial para los estudiantes del sexto grado de primaria de nuestro país, aprobado por el Ministerio de Educación del Perú en el año 2012, cuya distribución fue gratuita a nivel nacional y se conserva en el banco del libro de las instituciones educativas para su gestión y uso.

**4.4.4.1 Tareas ( $\tau_i$ ), técnicas ( $\tau_i$ ), tecnologías ( $\Theta_i$ ) y teorías ( $\Theta_i$ ) de estudio.**

$\tau_1$ : Escribir números del 1 al 10 en diferentes trozos de papel, extraer uno para responder preguntas sobre posible, imposible, seguro y más probable.

$\tau_1$ : Escribe números del 1 al 10 en diferentes trozos de papel. Dóblalos, ponlos en una bolsa, mézclalos bien y extrae uno.

Responde las siguientes preguntas.

- a) ¿Es posible que ese número sea menor que 4?
- b) ¿Es seguro que sea un número menor que 20?
- c) ¿Es posible que sea un número entre 11 y 20?
- d) ¿Es más probable que sea un número par?
- e) ¿Es imposible sacar números mayores que 10?

*Análisis de técnicas de la tarea 1:*

$\tau_{11}$ : Escribe en trozos de papel números del 1 al 10.

$\tau_{21}$ : Coloca los papeles enumerados y doblados en una bolsa, y los mezcla bien.

$\tau_{31}$ : Extrae un papel enumerado.

$\tau_{41}$ : Escribe que es posible que el número extraído al azar sea menor que 4 de una bolsa con números del 1 al 10.

$\tau_{51}$ : Escribe que es seguro sacar al azar un número menor que 20 de una bolsa con números del 1 al 10.

$\tau_{61}$ : Escribe que no es posible sacar al azar un número menor entre 11 y 20 de una bolsa con números del 1 al 10.

$\tau_{71}$ : Compara el grado de posibilidad de extraer números pares e impares y escribe que estos sucesos tienen la misma probabilidad.

$\tau_{81}$ : Escribe la palabra “*imposible*”, después de determinar que no es posible sacar números mayores que 10.

*Análisis de tecnologías de la tarea 1:*

$\theta_{11}$ : Vamos a llamar suceso a todo acontecimiento que puede ocurrir o no. (pág.198).

$\theta_{21}$ : ...los sucesos pueden ser posibles, seguros, imposibles y probables. (pág.198).

$\theta_{31}$ : ... si los sucesos A y B tienen la misma cantidad de posibilidades, se dice que la probabilidad de que ocurra A es igual a la probabilidad de que ocurra B (pág.199).

*Análisis de teorías de la tarea 1:*

$\Theta_{11}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

➤ Situaciones aleatorias reproducibles.

- Experimentos aleatorios.

D) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

E) Suceso : Seguro, posible e imposible.

F) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

G) Comparación de la probabilidad de sucesos.

H) Equiprobabilidad.

$\text{Tr}_2$ : Lanzar una moneda al aire e indicar los resultados posibles.

Tr<sub>2</sub>: Cada alumno lanza una moneda al aire y luego lee la figura que salió (cara o sello).

- ¿Cuántas veces se puede lanzar la moneda?
- Antes de lanzar la moneda, ¿se sabe qué resultado saldrá?
- Se sabe cuáles son los posibles resultados: cara o sello.

*Análisis de técnicas de la tarea 2:*

$\tau_{12}$ : Lanza una moneda al aire y observa la figura que salió, cara o sello.

$\tau_{22}$ : Escribe que se puede lanzar varias veces una moneda al aire.

$\tau_{32}$ : Escribe que no se conoce el resultado que saldrá antes de lanzar la moneda.

$\tau_{33}$ : Escribe los posibles resultados de lanzar una moneda al aire, cara o sello.

*Análisis de tecnologías de la tarea 2:*

$\theta_{12}$ : — El experimento se puede repetir muchas veces.

A estos experimentos se les llama fenómenos aleatorios (pág.199).

$\theta_{22}$ : — No se conoce el resultado del experimento.

A estos experimentos se les llama fenómenos aleatorios (pág.199).

$\theta_{32}$ : — ...sí se sabe cuáles son los posibles resultados.

A estos experimentos se les llama fenómenos aleatorios (pág.199).

*Análisis de teorías de la tarea 2:*

$\Theta_{12}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

Situaciones aleatorias (no deterministas o de incertidumbre).

➤ Situaciones aleatorias reproducibles no reproducibles.

➤ Situaciones aleatorias reproducibles.

- Experimentos aleatorios.

A) Componentes:

- ✎ Contexto.
- ✎ Restricciones.
- ✎ Condiciones.
- ✎ Espacio muestral.
- ✎ Sucesos.

B) Suceso : posible.

Tr<sub>3</sub>: Lanzar un dado e indicar los resultados (sucesos).

Tr<sub>3</sub>: Cada alumno lanza un dado y responde las siguientes preguntas:

- Antes de lanzarlo, ¿se sabe qué número saldrá?
- Pero sí se sabe que el resultado será un número del 1 al 6.

*Análisis de técnicas de la tarea 3:*

$\tau_{13}$ : Lanza un dado varias veces y observa la cantidad de puntos que sale en la cara superior.

$\tau_{23}$ : Escribe que no se sabe que número saldrá antes de lanzar el dado.

*Análisis de tecnologías de la tarea 3:*

$\theta_{13}$ : — El experimento se puede repetir muchas veces.

A estos experimentos se les llama fenómenos aleatorios (pág.199).

$\theta_{23}$ : — No se conoce el resultado del experimento.

— Pero sí se sabe cuáles son los posibles resultados.

A estos experimentos se les llama fenómenos aleatorios (pág.199).

*Análisis de teorías de la tarea 3:*

$\Theta_{13}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

Situaciones aleatorias (no deterministas o de incertidumbre).

- Situaciones aleatorias reproducibles no reproducibles.
- Situaciones aleatorias reproducibles.
  - Experimentos aleatorios.

C) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

Tr<sub>4</sub>: Escribir su nombre en un pedazo de papel, escoger uno y leer el nombre.

Tr<sub>4</sub> Cada alumno escribe su nombre en un pedazo de papel, lo dobla en cuatro y lo pone dentro de una bolsa. ¿Cuántos papelitos hay en la bolsa? Mezclamos los papelitos, escogemos uno y leemos el nombre.

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas veces podemos elegir un papelito de la bolsa?
- Antes de abrir el papelito elegido, ¿se sabe qué nombre contiene?
- Lo único que se sabe es que el nombre corresponde a un alumno de la clase.

*Análisis de técnicas de la tarea 4:*

$\tau_{14}$ : Escribe su nombre en un pedazo de papel.

$\tau_{24}$ : Coloca todos los papelitos doblados en cuatro dentro de una bolsa

$\tau_{34}$ : Escribe la cantidad de papelitos que hay en la bolsa

$\tau_{44}$ : Mezcla los papelitos dentro de la bolsa, extrae uno y lee el nombre.

$\tau_{54}$ : Escribe que puede elegir varias veces un papelito de la bolsa.

$\tau_{64}$ : Escribe que no se sabe que nombre contiene el papelito elegido antes de abrirlo.

*Análisis de tecnologías de la tarea 4:*

$\theta_{14}$ : — El experimento se puede repetir muchas veces.

A estos experimentos se les llama fenómenos aleatorios (pág.199).

$\theta_{14}$ : — No se conoce el resultado del experimento.

— Pero sí se sabe cuáles son los posibles resultados.

A estos experimentos se les llama fenómenos aleatorios (pág.199).

*Análisis de teorías de la tarea 4:*

$\Theta_{14}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

Situaciones aleatorias (no deterministas o de incertidumbre).

- Situaciones aleatorias reproducibles no reproducibles.
- Situaciones aleatorias reproducibles.
  - Experimentos aleatorios.

D) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

Tr<sub>5</sub>: Extraer un papelito de los 10 (tarea 1), leer el número para responder preguntas sobre fenómeno aleatorio y muestra.

Tr<sub>5</sub>: Extrae un papelito de los 10 que preparaste en tu trabajo individual anterior y lee el número.

- ¿Crees que es un fenómeno aleatorio? ¿Por qué?
- ¿Cuál sería su conjunto de resultados?

*Análisis de técnicas de la tarea 5:*

$\tau_{15}$ : Extrae un papelito de una bolsa, que están enumerados del 1 al 10, y lee el número.

$\tau_{25}$ : Escribe porqué cree que extraer un papelito de una bolsa y leer el número que salió es un fenómeno aleatorio.

$\tau_{35}$ : Escribe el conjunto de resultados que se puede extraer de la bolsa.

*Análisis de tecnologías de la tarea 5:*

$\theta_{15}$ : — El experimento se puede repetir muchas veces.

- No se conoce el resultado del experimento.
- Pero sí se sabe cuáles son los posibles resultados.

A estos experimentos se les llama fenómenos aleatorios (pág.199).

$\theta_{25}$ : Espacio muestral.

Llamaremos espacio muestral ( $\Omega$ ) de un experimento aleatorio al conjunto de todos los posibles resultados de ese experimento. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado  $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ .

(<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>).

(pág. 201).



Para ampliar la información, consulta el siguiente enlace:

<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>

*Análisis de teorías de la tarea 5:*

$\Theta_{15}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

Situaciones aleatorias (no deterministas o de incertidumbre).

- Situaciones aleatorias reproducibles no reproducibles.
- Situaciones aleatorias reproducibles.
  - Experimentos aleatorios.

E) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

$Tr_6$ : Predecir el resultado antes de lanzar un dado.

$Tr_6$ : De las tres afirmaciones siguientes, se debe elegir una antes de lanzar un dado.

- El número será par.
- El número será impar.
- El número será mayor que 2.

Gana el que acierta el resultado.

*Análisis de técnicas de la tarea 6:*

$\tau_{16}$ : Encuentra que obtener un número par o impar al lanzar un dado tienen igual probabilidad de salir, porque hay tres números pares y tres números impares.

$\tau_{16}$ : Encuentra que tiene más probabilidad obtener un número mayor que dos, porque hay 4 números y elige esta opción para ganar.

*Análisis de tecnologías de la tarea 6:*

$\theta_{16}$ : ...si los sucesos A y B tienen la misma cantidad de posibilidades, se dice que la probabilidad de que ocurra A es igual a la probabilidad de que ocurra B. (pág.199).

$\theta_{26}$ :La probabilidad de que ocurra un suceso A es mayor que la probabilidad de que ocurra un suceso B, si A tiene más posibilidad de ocurrir que B. (pág.199).

*Análisis de teorías de la tarea 6:*

$\Theta_{16}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.
- Experimentos aleatorios de espacio muestral equiprobable.
- Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr<sub>7</sub>: Lanzar un dado y dos dados a la vez, obtener el mayor resultado y responder preguntas sobre posible, imposible, más probable y menos probable.

Tr<sub>7</sub>: Aurelio juega con Benito a lanzar un dado cada uno. Gana el que saca el mayor número.

- a) ¿Es posible que los dos obtengan un mismo número?
- b) ¿Es verdad que es imposible que salga un número mayor que 6?
- c) Si Aurelio lanza y saca 4, le toca el turno a Benito. ¿Qué es más probable, que gane Benito o que gane Aurelio?
- d) Benito lanza el dado y obtiene un 6. Le toca el turno a Aurelio.
  - ¿Es posible que gane Aurelio?
  - ¿Es posible que empate Aurelio?
  - ¿Es posible que gane Benito?
  - ¿Cuál de las tres situaciones es la más probable?
- e) Los dos lanzan su dado a la vez, ¿qué es menos probable, que gane Benito, que

*Análisis de técnicas de la Tarea 7:*

$\tau_{17}$ : Escribe que es posible que Aurelio y Benito obtengan un mismo número al lanzar cada uno un dado.

$\tau_{27}$ : Escribe que es imposible que salga un número mayor que 6 al lanzar un dado.

$\tau_{37}$ : Escribe que es más probable que gane Aurelio.

$\tau_{47}$ : Escribe que es posible que gane Benito.

$\tau_{57}$ : Compara el grado de posibilidad y escribe que es más probable que Benito gane a Aurelio.

$\tau_{58}$ : Lanza dos dados a la vez.

$\tau_{59}$ : Escribe que es menos probable que empaten.

*Análisis de tecnologías de la tarea 7:*

$\theta_{17}$ : ...los sucesos pueden ser posibles, seguros, imposibles y probables. (pág.198).

$\theta_{27}$ : ...La probabilidad de que ocurra un suceso A es mayor que la probabilidad de que ocurra un suceso B, si A tiene más posibilidad de ocurrir que B. (pág.199).

*Análisis de teorías de la tarea 7:*

$\Theta_{17}$ : Ausente en el texto

Debería haber:

- Experimentos aleatorios.

A) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

- B) Suceso : posible e imposible.
- C) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.
- D) Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr8: Predecir el resultado al lanzar una moneda, lanzar una moneda 10 veces cada uno, elaborar un tablero con los resultados y responder preguntas.

Tr8: Tú y nueve compañeros van a realizar un experimento. Es necesario que cada uno tenga una moneda.

Cada uno lanza 10 veces la moneda y anota en un tablero cuántas veces sale cara y cuántas, sello.

Por ejemplo, Mario lanzó su moneda 10 veces y ha obtenido 4 caras y 6 sellos, entonces su tablero será:



The illustration shows a young boy with dark hair, wearing a green shirt, sitting at a wooden desk. He is looking towards the viewer with a slight smile. On the desk in front of him is a coin. Below the desk is a small table with two columns and two rows. The first row contains the words 'Caras' and 'Sellos'. The second row contains the numbers '4' and '6'.

Caras	Sellos
4	6

*Análisis de técnicas de la Tarea 8:*

Antes de lanzar sus monedas, respondan las siguientes preguntas:

- a) Si cada uno lanza 10 veces la moneda, ¿cuántas veces lanzaron la moneda en total?
- b) ¿Qué debe salir más, caras o sellos?
- c) ¿Será posible que salgan 45 caras y 55 sellos?
- d) ¿Será imposible que salgan 0 caras y 100 sellos?
- e) ¿Es verdad que es más probable que salgan menos caras que sellos?

Ahora lancen sus monedas, escriban sus resultados y elaboren un solo tablero con los 100 resultados.

Mirando el cuadro de resultados totales, respondan las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuántas caras y cuántos sellos salieron?
- b) Si estos 10 alumnos repiten el experimento, ¿saldrán las mismas cantidades?

Finalmente, si se tiene que apostar a cara o sello, ¿con cuál se tiene más oportunidades de ganar?

$\tau_{18}$ : Escribe, sin hacer el experimento, el total de lanzamientos de 10 lanzamientos que hicieran cada una de 10 personas.

$\tau_{28}$ : Escribe su hipótesis acerca de lo que más debe salir, caras o sellos.

$\tau_{38}$ : Escribe que es posible que salgan 45 caras y 55 sellos.

$\tau_{48}$ : Escribe que es imposible que salgan 0 caras y 100 sellos.

$\tau_{58}$ : Escribe que es verdad que es más probable que salgan menos caras que sellos.

$\tau_{68}$ : Lanza una moneda 10 veces.

$\tau_{78}$ : Escribe en un tablero cuántas veces sale cara y cuántas veces sale sello de 100 resultados.

$\tau_{88}$ : Escribe cuántas caras y cuántos sellos salieron según el cuadro de resultados totales.

$\tau_{98}$ : Escribe su hipótesis de que salgan las mismas cantidades si los 10 alumnos repiten el experimento.

$\tau_{108}$ : Escribe que se tienen las mismas oportunidades de ganar con cara o sello.

*Análisis de tecnologías de la tarea 8:*

$\theta_{18}$ : Espacio muestral.

Llamaremos espacio muestral ( $\Omega$ ) de un experimento aleatorio al conjunto de todos los posibles resultados de ese experimento. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado  $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ .

(<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>).

(pág. 201).

$\theta_{28}$ : Los sucesos pueden ser posibles, seguros, imposibles y probables. (pág.198).

$\theta_{38}$ : La probabilidad de que ocurra un suceso A es mayor que la probabilidad de que ocurra un suceso B, si A tiene más posibilidad de ocurrir que B. (pág.199).

$\theta_{48}$ : — El experimento se puede repetir muchas veces.

— No se conoce el resultado del experimento.

— Pero sí se sabe cuáles son los posibles resultados.

A estos experimentos se les llama fenómenos aleatorios (pág.199).

$\theta_{58}$ : ..si los sucesos A y B tienen la misma cantidad de posibilidades, se dice que la probabilidad de que ocurra A es igual a la probabilidad de que ocurra B. (pág.199).

*Análisis de teorías de la tarea 8:*

$\Theta_{18}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Experimentos aleatorios.

A) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

B) Suceso : posible e imposible.

C) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

D) Planteamiento por frecuencia relativa del cálculo de probabilidades.

E) Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr<sub>9</sub>: Extraer un papelito de los 10 (tarea 1) y responder preguntas sobre comparación de probabilidades.

Tr<sub>9</sub>: Continuamos con el juego de los papelitos de la página 198 saca un papel de la bolsa y responde en tu cuaderno.

a) De los siguientes sucesos, ¿cuál es el más probable?

- Que sea un número par.
- Que sea un número impar.
- Que sea un número múltiplo de 8.
- Que sea mayor que 10.

b) De los cuatro sucesos que aparecen, ¿cuáles tienen la misma probabilidad?

c) Si se saca un número menor que 5, ¿es probable que sea un número múltiplo de 3?

*Análisis de técnicas de la tarea 9:*

$\tau_{19}$ : Escribe que los sucesos que sea un número par o impar son los más probables.

$\tau_{29}$ : Escribe que el número sea par o impar, tienen la misma probabilidad de salir de un conjunto de cuatro sucesos.

$\tau_{39}$ : Escribe que es (menos) probable que se saque un número menor que 5 y sea múltiplo de 3.

*Análisis de tecnologías de la tarea 9:*

$\theta_{19}$ : Suceso.

Se llama suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Diremos que un suceso A, ocurre si el resultado del experimento es uno de los sucesos elementales que pertenecen a A.

(<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>).

(pág. 201).

$\theta_{29}$ : La probabilidad de que ocurra un suceso A es mayor que la probabilidad de que ocurra un suceso B, si A tiene más posibilidad de ocurrir que B. (pág.199).

$\theta_{39}$ :... si los sucesos A y B tienen la misma cantidad de posibilidades, se dice que la probabilidad de que ocurra A es igual a la probabilidad de que ocurra B. (pág.199).

$\theta_{49}$ : Cualquier suceso se puede descomponer como la unión de sucesos elementales.

Al conjunto de todos los sucesos de un experimento se le llama espacio de sucesos.

Este conjunto se denota por  $P(\Omega)$ , partes del espacio muestral y tiene  $2^n$  elementos, siendo n el número de sucesos elementales. En el caso del lanzamiento de un dado, hay  $2^6$  posibles sucesos, es decir, 64.

(<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>).

(pág. 201).



Para ampliar la información, consulta el siguiente enlace:

<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>

*Análisis de teorías de la tarea 9:*

⊖<sub>19</sub>: Ausente en el texto.

Debería haber:

- Experimentos aleatorios.

A) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

B) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

C) Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr<sub>10</sub>: Lanzar un dado y responder preguntas sobre improbable, más probable y menos probable.

Tr<sub>10</sub>: Se lanza un dado normal. Piensa y responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

- a) ¿Qué suceso es más probable?
- Que salga el número 4.
  - Que salga el número 8.
  - Que salga un número menor que 3.
  - Que salga un número múltiplo de 5.
- b) De los 3 sucesos que aparecen en a, ¿cuáles son improbables?
- c) ¿Qué es más probable, obtener un número par, o sacar un número menor que 7?
- d) ¿Qué es menos probable, sacar un múltiplo de 2 o un múltiplo de 3?

*Análisis de técnicas de la tarea 10:*

$\tau_{110}$ : Escribe que es más probable que salga un número menor que 3 de un conjunto de cuatro sucesos dados.

$\tau_{210}$ : Escribe que son improbables que salga el número 8 y que salga un número múltiplo de 5.

$\tau_{310}$ : Escribe que es más probable sacar un número par que sacar un número menor que 7.

$\tau_{410}$ : Escribe que es menos probable sacar un múltiplo de 3 que sacar un múltiplo de 2.

*Análisis de tecnologías de la tarea 10:*

$\theta_{110}$ : La probabilidad de que ocurra un suceso A es mayor que la probabilidad de que ocurra un suceso B, si A tiene más posibilidad de ocurrir que B. (pág.199).

*Análisis de teorías de la tarea 10:*

$\Theta_{110}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Experimentos aleatorios.

D) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

E) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

F) Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr<sub>11</sub>: Lanzar dos monedas una a continuación de la otra y responder preguntas sobre más probable.

Tr<sub>11</sub>: Se lanza una moneda primero y luego una segunda moneda y obtienen los siguientes cuatro resultados:

- (cara – cara)
- (cara – sello)
- (sello – cara)
- (sello – sello).

Responde en tu cuaderno:

- a) ¿A cuál de esos resultados apostarías?
- b) ¿Qué es más probable, que salgan dos caras o que salgan dos sellos?
- c) Si Juan apuesta a que salen dos figuras iguales y Pedro apuesta a que salen dos figuras diferentes, ¿quién tiene más probabilidades de ganar?

*Análisis de técnicas de la tarea 11:*

$\tau_{111}$ : Escribe que apostarías a cualesquiera de los resultados dados.

$\tau_{211}$ : Escribe que es igualmente probable que salga dos caras o dos sellos.

$\tau_{311}$ : Escribe que Juan y pedro tienen igual probabilidad de ganar cuando apuesten a dos figuras iguales o dos figuras diferentes.

*Análisis de tecnologías de la tarea 11:*

$\theta_{111}$ :... si lanzas sucesivamente dos monedas. Los resultados posibles son:

- cara en la primera moneda y cara en la segunda moneda (cara – cara).
- cara en la primera moneda y sello en la segunda moneda (cara – sello).
- sello en la primera moneda y cara en la segunda moneda (sello – cara).
- sello en la primera moneda y sello en la segunda moneda (sello – sello).

Cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad, porque, de los cuatro, uno tendrá que salir de todas maneras. (pág. 212)

*Análisis de teorías de la tarea 11:*

$\Theta_{111}$ : Ausente en el texto.

- Experimentos aleatorios.

A) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

B) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

C) Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr<sub>12</sub>: Identificar un experimento aleatorio.

Tr<sub>12</sub>: Identifiquen en cada caso si se trata o no de un experimento aleatorio.

- a) Lanzar un dado.
- b) Tirar una moneda al aire.
- c) Identificar qué día será mañana.
- d) Sacar una bola de un color determinado de un recipiente donde hay bolas de diferente color.
- e) Elegir al máximo goleador de un campeonato de fútbol que aún se está jugando.
- f) Participar con un boleto en una rifa.

*Análisis de técnicas de la Tarea 12:*

$\tau_{112}$ : Escribe un sí, si se trata de un experimento aleatorio; y con un no, si no es un experimento aleatorio de un conjunto de situaciones.

*Análisis de tecnologías de la tarea 12:*

$\theta_{112}$ : — El experimento se puede repetir muchas veces.

— No se conoce el resultado del experimento.

— Pero sí se sabe cuáles son los posibles resultados.

A estos experimentos se les llama fenómenos aleatorios. (p.199)

*Análisis de teorías de la tarea 12:*

$\Theta_{112}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

➤ Tipos de situación.

e) Situación determinista.

f) Situación de incertidumbre o aleatoria.

- a. Situaciones aleatorias no reproducibles.
- b. Situaciones aleatorias reproducibles.
  - Experimentos aleatorios.
  - Componentes: Contexto, restricciones, condiciones y espacio muestral.

Tr<sub>13</sub>: Lanzar un dado e identificar sucesos menos probables.

Tr<sub>13</sub>: María lanza un dado. ¿Cuál de los sucesos es menos probable?

- a) Que salga un número impar.
- b) Que salga un múltiplo de 2.
- c) Que salga un número primo.
- d) Que salga un valor menor que 3.

$\tau_{213}$ : Escribe que el suceso menos probable es que salga un valor menor que 3.

### *Análisis de tecnologías de la tarea 13:*

$\theta_{113}$ : Suceso.

Se llama suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Diremos que un suceso A, ocurre si el resultado del experimento es uno de los sucesos elementales que pertenecen a A.

Ejemplos:

- Consideremos el experimento “lanzar un dado”.

Sea el suceso A=” salir número par”

A ocurre cuando al lanzar el dado se obtiene 2, 4 o 6.

- Lanzamos dos monedas simultáneamente  $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$

Sea el suceso B=” salir al menos una cruz”

B se cumplirá en los siguientes casos CX, XC, XX.

(<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>). (pág. 201).



Para ampliar la información, consulta el siguiente enlace:

<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>

*Análisis de teorías de la tarea 13:*

$\Theta_{113}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Experimentos aleatorios.

E) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

F) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

G) Experimentos aleatorios de espacio muestral equiprobable.

H) Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr<sub>14</sub>: Escribir las ocho letras de la palabra Ayacucho uno en cada tarjeta y escoger una para responder preguntas sobre lo probable y más probable.

$\tau_{14}$ : Elaboren 8 tarjetas y escriban en cada una de ellas una letra de la palabra

AYACUCHO. Luego, colóquenlas en una caja o bolsa y remuévanlas:



Pidan a una compañera o compañero que escoja una tarjeta sin mirar qué letra está escrita en ella:

- ¿Qué es más probable, que escoja la letra C o la letra H?
- ¿Qué letra tiene la mayor probabilidad de ser escogida?
- ¿Es probable que escoja la letra N?

*Análisis de técnicas de la tarea 14:*

$\tau_{114}$ : Elabora 8 tarjetas y escribe en cada una de ellas una letra de la palabra

AYACUCHO.

$\tau_{214}$ : Coloca las tarjetas en una caja o bolsa y las remueve.

$\tau_{314}$ : Escribe que es más probable que su compañera o compañero escoja sin mirar la letra C que la letra H.

$\tau_{414}$ : Escribe que la letra A y la letra C tienen la mayor probabilidad de ser escogidas en la palabra AYACUCHO.

$\tau_{514}$ : Escribe que no es probable que escoja la letra N.

*Análisis de tecnologías de la tarea 14:*

$\theta_{114}$ : La probabilidad de que ocurra un suceso A es mayor que la probabilidad de que ocurra un suceso B, si A tiene más posibilidad de ocurrir que B. (pág. 199).

*Análisis de teorías de la tarea 14:*

$\Theta_{114}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Experimentos aleatorios.

A) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

B) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

C) Experimentos aleatorios de espacio muestral equiprobable.

D) Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr<sub>15</sub>: Calcular la probabilidad, comparar con “mayor probabilidad que” y justificar.

Tr<sub>15</sub>: La familia de Daniel tiene 24 de los 1000 boletos de una rifa, mientras que Isabel dice que la probabilidad de que gane alguien de su familia es de 15 entre 500. ¿Cuál de las familias tiene mayor probabilidad de ganar el premio? ¿Por qué?

*Análisis de técnicas de la tarea 15:*

$\tau_{115}$ : Escribe cada suceso, como una fracción, donde el numerador representa la cantidad de boletos que tiene cada familia y el denominador la cantidad total de boletos de la rifa.

$\tau_{215}$ : Compara la probabilidad de ganancia de cada familia utilizando las fracciones equivalentes.

$\tau_{315}$ : Escribe dando razones que la familia de Isabel tiene mayor probabilidad de ganar el premio.

*Análisis de tecnologías de la tarea 15:*

$\theta_{115}$ : ... "La probabilidad de ganar no depende del premio, sino del número de boletos que tiene cada lotería". (pág. 201).

$\theta_{215}$ : • 3 boletos de 300 es lo mismo que 1 de 100.

• 5 boletos de 600 es equivalente a 1 de 120.



Como vemos, apostar 1 de 100 es más probable que apostar 1 de 120, pero en ambos casos es poco probable ganar. (pág. 201).

$\theta_{315}$ : La probabilidad de que ocurra un suceso A es mayor que la probabilidad de que ocurra un suceso B, si A tiene más posibilidad de ocurrir que B.. (pág.199).

*Análisis de teorías de la tarea 15:*

$\Theta_{15;1}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

Comparación de probabilidades.

$Tr_{16}$ : Calcular la probabilidad, comparar con “menor probabilidad que”

$Tr_{16}$ : Carla tiene 10 pares de medias en una cajita: 2 pares son de color negro, 5 de color blanco, 2 color azul y un par de color marrón. Si coge un par de medias al azar:

- a) ¿Qué es menos probable, que sea un par azul o que sea negro?
- b) ¿Qué color tiene menos probabilidades de salir?

*Análisis de técnicas de la tarea 16:*

$\tau_{116}$ : Escribe que es igualmente probable sacar un par de medias azul o negro.

$\tau_{216}$ : Escribe que el color marrón tiene menos probabilidad de salir.

*Análisis de tecnologías de la tarea 16:*

$\theta_{116}$ : Ausente en el texto.

*Análisis de teorías de la tarea 16:*

⊖<sub>116</sub>: Ausente en el texto.

Debería haber:

- Experimentos aleatorios.

E) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

F) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

G) Experimentos aleatorios de espacio muestral equiprobable.

H) Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr<sub>17</sub>: Lanzar dos monedas simultáneamente y responder preguntas sobre posible y más probable.

Tr<sub>17</sub>: Jesús lanza al aire simultáneamente dos monedas de un nuevo sol.

a) ¿Es posible que en una salga cara y en la otra sello?

b) ¿Qué es más probable, que salga (cara – cara) o que salgan dos figuras diferentes?

*Análisis de técnicas de la tarea 17:*

τ<sub>117</sub>: Escribe todos los posibles resultados al lanzar simultáneamente dos monedas al aire.

τ<sub>217</sub>: Escribe que es posible que en una salga cara y en el otro sello.

$\tau_{317}$ : Escribe que es más probable que salgan dos figuras diferentes a que salga (cara-cara).

*Análisis de tecnologías de la tarea 17:*

$\theta_{117}$ : Espacio muestral.

Llamaremos espacio muestral ( $\Omega$ ) de un experimento aleatorio al conjunto de todos los posibles resultados de ese experimento. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado  $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ .

(<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>).

(pág. 201).

$\theta_{217}$ : ...los sucesos pueden ser posibles, seguros, imposibles y probables. (pág.198).

$\theta_{317}$ : ... si los sucesos A y B tienen la misma cantidad de posibilidades, se dice que la probabilidad de que ocurra A es igual a la probabilidad de que ocurra B. (pág.199).



Para ampliar la información, consulta el siguiente enlace:

<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>

*Análisis de teorías de la tarea 17:*

$\Theta_{117}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Experimentos aleatorios.

A) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

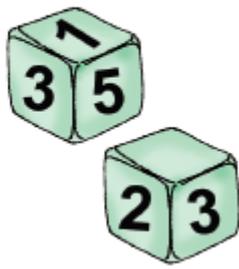
- B) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.
- C) Experimentos aleatorios de espacio muestral equiprobable.
- D) Comparación de la probabilidad de sucesos.
- E) Sucesos compuestos.
- F) Sucesos no excluyentes.

Tr<sub>18</sub>: Calcular la probabilidad.

**Juego para aprender**

Un dado es un cubo con un número del 1 al 6 escrito en cada cara. Estos números están dispuestos de forma tal que las caras opuestas siempre suman 7. Así, el 1 se opone al 6, el 2 se opone al 5 y el 3 se opone al 4. Entonces, cuando se ven tres caras de un dado, es posible decir qué números están sobre las otras tres caras escondidas.

En este caso, los números que están escondidos son el 4, que está opuesto al 3, el 2 que está opuesto al 5 y el 6, opuesto al 1. Si en un dado se ven tres caras, pero solo se reconocen dos números, el 2 y el 3, ¿cuál es la probabilidad de que el número 6 esté sobre una de las tres caras escondidas?



*Análisis de técnicas de la tarea 18:*

$\tau_{118}$ : Escribe la probabilidad de que el número 6 esté sobre una de las tres caras escondidas.

*Análisis de tecnologías de la tarea 18:*

$\theta_{118}$ : Ausente en el texto.

*Análisis de teorías de la tarea 18:*

$\Theta_{118}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Probabilidad de un suceso.
- Variable aleatoria.

Tr<sub>19</sub>: Predecir la probabilidad de dos sucesos al lanzar un dado, comparar con menos probable y justificar.

Tr<sub>19</sub>: Si se lanza un dado, ¿qué es menos probable que salga, un número menor que 3 o un número mayor que 5? ¿Por qué?

*Análisis de técnicas de la tarea 19:*

$\tau_{119}$ : Escribe dando razones que es menos probable que salga un número mayor que 5 a que salga un número menor que 3, al lanzar un dado.

*Análisis de tecnologías de la tarea 19:*

$\theta_{119}$ : Ausente en el texto.

*Análisis de teorías de la tarea 19:*

$\Theta_{119}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Experimentos aleatorios.

G) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

H) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

I) Experimentos aleatorios de espacio muestral equiprobable.

J) Comparación de la probabilidad de sucesos.

$Tr_{20}$ : Escribir cada letra de la palabra EULALIA en un papel, escoger una, calcular la probabilidad y comparar con “la misma probabilidad que”

$Tr_{20}$ : Escribe cada letra del nombre EULALIA sobre un trozo de papel para tener 7 papelitos. Dóblalos y colócalos dentro de una bolsa. Agita la bolsa y extrae uno de los papelitos.

¿Cuáles son las letras que tienen la misma probabilidad?

*Análisis de técnicas de la tarea 20:*

$\tau_{120}$ : Escribe sobre un trozo de papel cada una de las letras del nombre EULALIA obteniendo 7 papelitos.

$\tau_{220}$ : Coloca los papelitos doblados dentro de una bolsa y los agita.

$\tau_{320}$ : Extrae un papelito que contiene las letras de la palabra EULALIA.

$\tau_{420}$ : Escribe que las letras L, A, E,U, I tienen la misma probabilidad.

*Análisis de tecnologías de la tarea 20:*

$\theta_{120}$ : Espacio muestral.

Llamaremos espacio muestral ( $\Omega$ ) de un experimento aleatorio al conjunto de todos los posibles resultados de ese experimento. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado  $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ .

(<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>).

(pág. 201).

$\theta_{220}$ : ... si los sucesos A y B tienen la misma cantidad de posibilidades, se dice que la probabilidad de que ocurra A es igual a la probabilidad de que ocurra B. (pág.199).



Para ampliar la información, consulta el siguiente enlace:

<http://www.ematematicas.net/estadistica/probabilidad/index.php?tipo=definiciones>

*Análisis de teorías de la tarea 20:*

$\Theta_{120}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Experimentos aleatorios.

A) Componentes:

- Contexto.

- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

B) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

C) Experimentos aleatorios de espacio muestral equiprobable.

D) Comparación de la probabilidad de sucesos.

Tr<sub>21</sub>: Realizar las combinaciones utilizando el diagrama del árbol y comparar con “es más probable que”.

Tr<sub>21</sub>: María tiene en su ropero 3 blusas: azul, rosada y blanca. Y 3 faldas: negra, gris y marrón. Si ella puede combinar las blusas y las faldas indistintamente, responde.

a) ¿Cuántas combinaciones posibles tiene?

b) ¿Qué es más probable, que elija al azar la blusa azul o la falda negra?

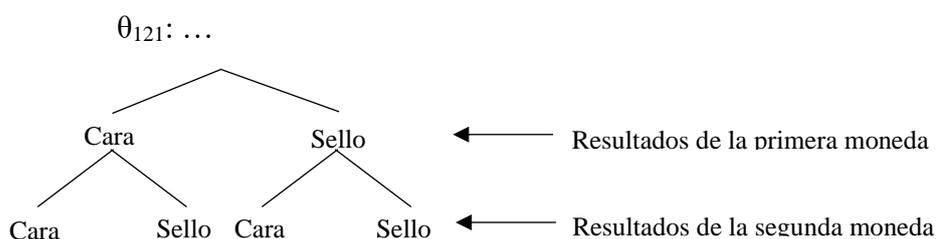
Resuelve el problema utilizando el diagrama del árbol.

*Análisis de técnicas de la tarea 21:*

$\tau_{121}$ : Escribe la cantidad de combinaciones posibles después de haber elaborado el diagrama del árbol.

$\tau_{221}$ : Escribe que es igualmente probable que elija la blusa azul o la falda negra.

*Análisis de tecnologías de la tarea 21:*



Los resultados posibles son:

- Cara en la primera moneda y cara en la segunda moneda (cara-cara).
- Cara en la primera moneda y sello en la segunda moneda (cara-sello).
- Sello en la primera moneda y cara en la segunda moneda (sello-cara).
- Sello en la primera moneda y sello en la segunda moneda (sello-sello).

Cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad, porque, de los cuatro, uno tendrá que salir de todas maneras. (pág.202).

$\theta_{221}$ : ... si los sucesos A y B tienen la misma cantidad de posibilidades, se dice que la probabilidad de que ocurra A es igual a la probabilidad de que ocurra B. (pág.199).

*Análisis de teorías de la tarea 21:*

$\Theta_{121}$ : Ausente en el texto.

Debería haber:

- Experimentos aleatorios.

A) Componentes:

- Contexto.
- Restricciones.
- Condiciones.
- Espacio muestral.
- Sucesos.

B) Planteamiento clásico del cálculo de probabilidades.

C) Experimentos aleatorios de espacio muestral equiprobable.

D) Comparación de la probabilidad de sucesos.

E) Combinatoria.

F) Digrama de árbol.

#### 4.4.4.2 Mapas de tareas y técnicas.

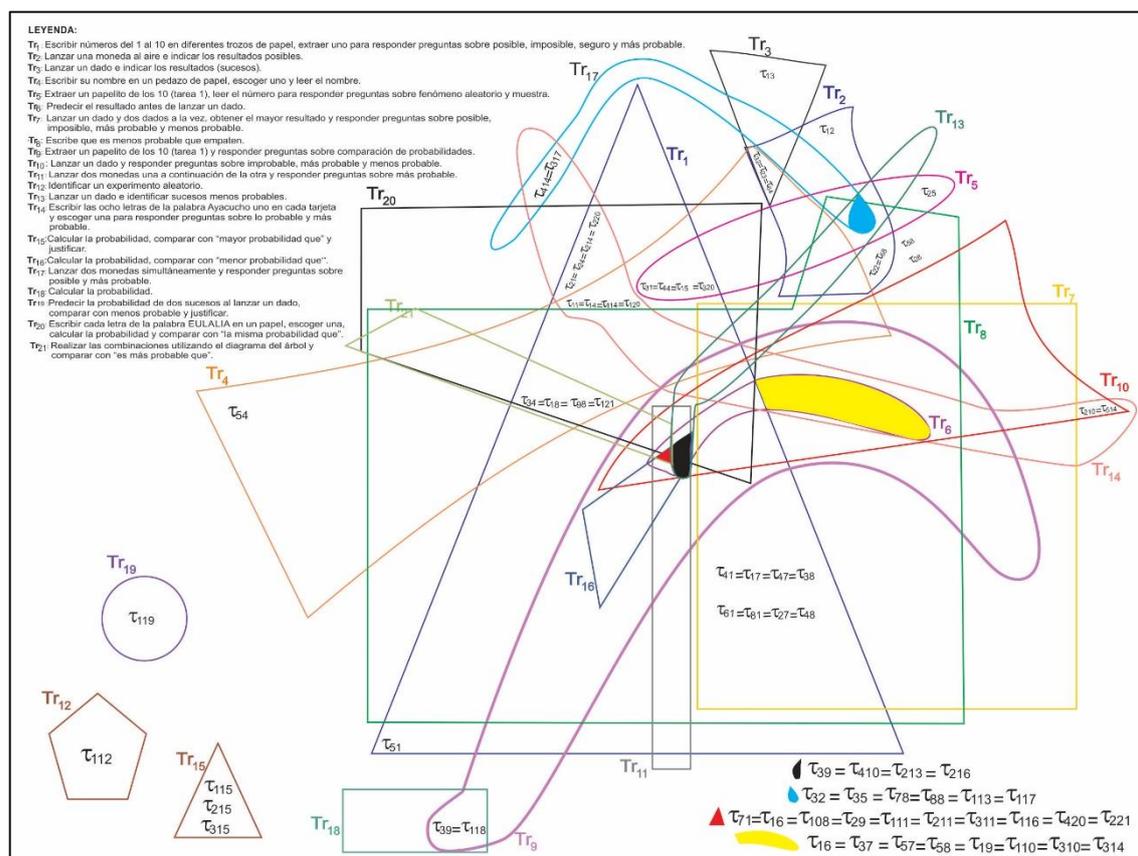


Figura 17. Mapa de tareas y técnicas del texto de sexto grado primario referido a la estocástica

#### 4.4.4.3 Descripción global y razón de ser del concepto de probabilidad propuesto por el texto.

El abordaje del sentido estocástico en el sexto grado de primaria está dado por la comparación de la probabilidad con más probable, menos probable, igual de probable. Además, se trabaja el espacio muestral.

#### 4.4.4.4 Hechos o fenómenos didácticos $\left(\varphi_i\right)$ .

**Tabla 21.**

*Análisis de tareas del texto de sexto grado sobre el sentido estocástico y hallazgos parciales*

TAREA	LO QUE HAY (acciones, conceptos)	CARACTERÍSTICAS DE LA TAREA (propósito, destinatario, incertidumbre, restricciones, repertorio de recursos cognitivos, procesos)	DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO DE LA TAREA (personal; educativa, ocupacional o laboral; pública, científica)	DEMANDA COGNITIVA DE LA TAREA (memorización, procedimientos sin conexiones, procedimientos con conexiones, hacer estocástica)	HALLAZGOS PARCIALES
Tr <sub>1</sub>	Escribir números del 1 al 10 en diferentes trozos de papel, extraer uno para responder preguntas sobre:  - Posible. - Imposible. - Seguro. - Más probable.	No tiene destinatario.  No posee incertidumbre ya que la tarea es estructurada.  La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda. Tarea de procedimientos sin conexiones, porque se centra en obtener una respuesta correcta.	La tarea 1 no menciona que debe extraer el papel sin mirar o al azar; esto es importante para asegurar la simetría y equiprobabilidad. Las tecnologías: $\theta_{11}$ : Vamos a llamar suceso a todo acontecimiento que puede ocurrir o no. (pág.198). $\theta_{21}$ : ...los sucesos pueden ser posibles, seguros, imposibles y probables. (pág.198). $\theta_{31}$ : ... si los sucesos A y B tienen la misma cantidad de posibilidades, se dice que la probabilidad de que ocurra A es igual a la probabilidad de que ocurra B (pág.199). La técnica 3 está en la p. 199. Ninguna de las tecnologías hace referencia a espacio muestral y probabilidad. Debe haber una secuencia ya que en quinto grado hay como previo experimento no determinístico.
Tr <sub>2</sub>	Lanzar una moneda al aire e indicar los resultados posibles.  - Experimento aleatorio. - Posibles resultados (espacio muestral).	No tiene destinatario. No posee incertidumbre ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda. Tarea de procedimientos sin conexiones, porque se centra en obtener una respuesta correcta.	La viñeta tres dice: "Se sabe cuáles son los posibles resultados: cara o sello". Esta tarea es respondida, por eso carece de sentido. No se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
Tr <sub>3</sub>	Lanzar un dado e indicar los resultados (sucesos). - Experimento aleatorio. - Suceso.	No tiene destinatario. No posee incertidumbre ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda. Tarea memorística. Porque evoca la situación.	La viñeta dos dice: "Pero sí se sabe que el resultado será un número del 1 al 6"; esto es una afirmación, no constituye una tarea lo cual resulta confuso para el estudiante. No se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
Tr <sub>4</sub>	Escribir su nombre en un pedazo de papel, escoger uno y leer el nombre. - Fenómeno aleatorio. - Espacio muestral.	No tiene destinatario.  No posee incertidumbre ya que la tarea es estructurada.  La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda. Tarea memorística. Porque evoca la situación.	En la tarea 4 no se da la indicación de sacar los papeletos sin mirar. Esto es importante, porque ninguno de los sucesos posibles debe tener mayor ventaja que otro (simetría); además se debe hacer reflexionar sobre esto. No se trabaja la simetría y equiprobabilidad.  En el tercer guión dice: "Lo único que se sabe es que el nombre corresponde a un alumno de la clase";

					<p>esto es una afirmación y podría considerarse una respuesta a la pregunta anterior, no es una tarea y, por tanto, es confuso para el estudiante. Aquí se trabaja también el espacio muestral pero no hay ninguna tecnología referido a ello.</p> <p>Esta tarea retoma la tarea 1 (Escribe números del 1 al 10 en diferentes trozos de papel. Dóblalos, ponlos en una bolsa, mézclalos bien y extrae uno.). En la tarea 5, no se da la indicación de sacar el papelito sin mirar. Esto es importante porque ninguno de los sucesos posibles debe tener mayor ventaja que otro (simetría). Además, se debe hacer reflexionar sobre esto. No se trabaja la simetría y equiprobabilidad.</p> <p>Como tecnología para ampliar la información deja la dirección web tal como se muestra.</p> 
Tr5	<p>Extraer un papelito de los 10 (tarea 1), leer el número para responder preguntas sobre:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Fenómeno aleatorio.</li> <li>- Espacio muestral.</li> </ul>	<p>No tiene destinatario.</p> <p>No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso.</p> <p>No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.</p>	Personal	<p>Baja demanda.</p> <p>Tarea memorística.</p> <p>Porque evoca la situación.</p>	
Tr6	<p>Predecir el resultado antes de lanzar un dado.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Igual probabilidad.</li> <li>- Más probable.</li> </ul>	<p>No tiene destinatario.</p> <p>No posee incertidumbre ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso.</p> <p>No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.</p>	Personal	<p>Baja demanda.</p> <p>Tarea de procedimientos sin conexiones, porque se centra en obtener una respuesta correcta.</p>	<p>Se debe entender que el estudiante del grado debe visitar la web y ampliar su conocimiento con la información teórica que en ella se muestra.</p> <p>Se debe precisar que el dado es no cargado; esto es importante porque ninguno de los sucesos posibles debe tener mayor ventaja que otro (simetría).</p> <p>Además, se debe hacer reflexionar sobre esto. No se trabaja la simetría y equiprobabilidad.</p>
Tr7	<p>Lanzar un dado y dos dados a la vez, obtener el mayor resultado y responder preguntas sobre:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Posible.</li> <li>- Imposible.</li> <li>- Más probable.</li> <li>- Menos probable.</li> </ul>	<p>No tiene destinatario.</p> <p>No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso.</p> <p>No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.</p>	Personal	<p>Baja demanda.</p> <p>Tarea de procedimientos sin conexiones, porque se centra en obtener una respuesta correcta.</p>	<p>Se debe precisar que el dado es no cargado, esto es importante porque ninguno de los sucesos posibles debe tener mayor ventaja que otro (simetría); además se debe hacer reflexionar sobre esto. No se trabaja la simetría y equiprobabilidad.</p> <p>Se está trabajando también suceso simple y suceso compuesto pero no hay preguntas que ayuden a la comparación, explicación y reflexión de este hecho.</p> <p>Las tecnologías no abordan el suceso simple y compuesto.</p> <p>No se trabaja la simetría (la moneda debe ser no sesgada) y equiprobabilidad.</p> <p>Las tecnologías no abordan la definición frecuencial, en tanto en la tarea se trabaja esta noción.</p>
Tr8	<p>Predecir el resultado al lanzar una moneda, lanzar una moneda 10 veces cada uno, elaborar un tablero con los resultados y responder preguntas.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Posible.</li> <li>- Imposible.</li> <li>- Más probable.</li> <li>- Probabilidad frecuentista.</li> </ul>	<p>No tiene destinatario.</p> <p>No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso.</p>	Personal	<p>Alta demanda.</p> <p>Tareas de procedimientos con conexiones, porque compara lo creíble con resultados de experimentos y elabora un tablero para expresar los resultados totales obtenidos.</p>	
Tr9	<p>Extraer un papelito de los 10 (tarea 1) y responder preguntas sobre:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad</li> <li>- Más probable</li> <li>- Igual probabilidad</li> </ul>	<p>No tiene destinatario.</p> <p>No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso.</p>	Personal	<p>Baja demanda</p> <p>Tarea de procedimientos sin conexiones, porque se centra en obtener una respuesta correcta.</p>	<p>Esta tarea retoma la tarea 1 de la p. 198. (Escribe números del 1 al 10 en diferentes trozos de papel. Dóblalos, ponlos en una</p>

		No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.			bolsa, mézclalos bien y extrae uno.) No se trabaja la simetría y equiprobabilidad. La pregunta A es confusa, se pregunta por el suceso más probable, pero en ninguna de las alternativas hay un suceso más probable que otro. La pregunta C debe estar dirigida a comparar para darle mayor sentido.  La tecnología 4 refiere a la dirección web tal como se muestra.
Tr10	Lanzar un dado y responder preguntas sobre: <ul style="list-style-type: none"><li>- Más probable.</li><li>- Improbable.</li><li>- Menos probable.</li></ul>	No tiene destinatario. No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda. Tarea memorística. Porque evoca la situación.	Se debe entender que el estudiante del grado debe visitar la web y ampliar su conocimiento con la información teórica que en ella se muestra. No se trabaja la simetría y equiprobabilidad. En la pregunta b se dice: "De los 3 sucesos que aparecen en a, ¿cuáles son improbables?", pero en a aparecen 4 sucesos. Esto genera confusión en el estudiante. En las tecnologías no se define improbable, tampoco menos probable. No se trabaja la simetría y equiprobabilidad. En la tecnología se hace referencia a la equiprobabilidad como: "...Cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad, porque, de los cuatro, uno tendrá que salir de todas maneras. (pág. 212) " pero no se hace la reflexión de ello en la tarea. En las tecnologías no se define igualmente probable. La pregunta b y c, pregunta por el mas probable, pero la respuesta esta en igual probabilidad, debiera hacerse una pregunta mas abierta para que el estudiante escoja lo conveniente luego de hacer la comparación. La tecnología de la tarea define fenómeno aleatorio; sin embargo, en la tarea se habla de experimento aleatorio. Esto genera confusión en el estudiante.
Tr11	Lanzar dos monedas a continuación de la otra y responder preguntas sobre: <ul style="list-style-type: none"><li>- Más probable.</li><li>- Igualmente probable.</li></ul>	No tiene destinatario. No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda. Tarea de procedimientos sin conexiones, porque se centra en obtener una respuesta correcta.	No se trabaja la simetría y equiprobabilidad. En la tecnología se hace referencia a la equiprobabilidad como: "...Cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad, porque, de los cuatro, uno tendrá que salir de todas maneras. (pág. 212) " pero no se hace la reflexión de ello en la tarea. En las tecnologías no se define igualmente probable. La pregunta b y c, pregunta por el mas probable, pero la respuesta esta en igual probabilidad, debiera hacerse una pregunta mas abierta para que el estudiante escoja lo conveniente luego de hacer la comparación. La tecnología de la tarea define fenómeno aleatorio; sin embargo, en la tarea se habla de experimento aleatorio. Esto genera confusión en el estudiante.
Tr12	Identificar un experimento aleatorio. <ul style="list-style-type: none"><li>- Experimento aleatorio.</li></ul>	No tiene destinatario. No posee incertidumbre ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda. Tarea memorística. Porque evoca un concepto.	La tecnología de la tarea define fenómeno aleatorio; sin embargo, en la tarea se habla de experimento aleatorio. Esto genera confusión en el estudiante.
Tr13	Lanzar un dado e identificar sucesos menos probables. <ul style="list-style-type: none"><li>- Menos probable.</li></ul>	No tiene destinatario. No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda. Tarea de procedimientos sin conexiones, porque se centra en obtener una respuesta correcta.	No se trabaja la simetría y equiprobabilidad. En las tecnologías no se define menos probable.
Tr14	Escribir las ocho letras de la palabra Ayacucho uno en cada	No tiene destinatario.	Personal	Baja demanda.	En B se pregunta: "¿Qué letra tiene la

	tarjeta y escoger una para responder preguntas sobre: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad.</li> <li>- Más probable.</li> </ul>	No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.		Tarea de procedimientos sin conexiones. Porque se centra en obtener una respuesta correcta.	mayor probabilidad de ser escogida?", por una sola letra pero hay dos letras con mayor probabilidad. Esto genera confusión en el estudiante.
Tr15	Calcular la probabilidad, comparar con "mayor probabilidad que" y justificar. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad como fracción.</li> <li>- Más probable.</li> </ul>	No tiene destinatario. No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada.	Personal	Baja demanda Tarea de procedimientos sin conexiones. Porque compara las probabilidades y dice por qué es mayor uno del otro, pero sin hacer un razonamiento de por qué no puede aplicar directamente Laplace.	En esta tarea los estudiantes deben establecer una proporcionalidad para comparar la probabilidad. Aquí se presentan sucesos compuestos y en primera instancia no se puede aplicar Laplace pues los resultados posibles no tienen la misma probabilidad, por ello hay que hacer una transformación en la composición de los boletos de la rifa mediante la simulación de urnas para asegurar la equiprobabilidad sin alterar la probabilidad de obtener una rifa en ambas urnas (familias). Esto no se hace ver al niño, más por el contrario se hacen procedimientos sin conexiones.
Tr16	Calcular la probabilidad, comparar con "menor probabilidad que" <ul style="list-style-type: none"> <li>- Menos probable.</li> </ul>	No tiene destinatario. No posee incertidumbre ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda Tarea de procedimientos sin conexiones. Porque se centra en obtener una respuesta correcta.	No se trabaja la simetría y equiprobabilidad. En la pregunta a, se pregunta por el menos probable, pero el par azul y negro tienen la misma probabilidad. Al parecer la pregunta pretende provocar un conflicto cognitivo.  Hay ausencia de tecnología, pues no se define menos probable.
Tr17	Lanzar dos monedas simultáneamente y responder preguntas sobre: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Posible.</li> <li>- Más probable.</li> </ul>	No tiene destinatario. No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda. Tarea de procedimientos sin conexiones, porque se centra en obtener una respuesta correcta.	No se trabaja la simetría y equiprobabilidad. No hay tecnología sobre suceso compuesto y su espacio muestral.
Tr18	Calcular la probabilidad. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad.</li> </ul>	No tiene destinatario. No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda. Tarea de procedimientos sin conexiones. Porque se centra en obtener una respuesta correcta.	Aquí se trabaja implícitamente y de manera intuitiva la variable aleatoria, ya que la suma de las caras opuestas de los dados es 7.
Tr19	Predecir la probabilidad de dos sucesos al lanzar un dado, comparar con menos probable y justificar. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Menos probable.</li> </ul>	No tiene destinatario. No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada.	Personal	Baja demanda. Tarea de procedimientos sin conexiones, porque se centra en obtener una respuesta correcta y evoca la situación para decir porqué.	No se trabaja la simetría y equiprobabilidad. En las tecnologías no se define menos probable. La tarea se plantea en la sección, <i>Evaluó mis aprendizajes</i> .
Tr20	Escribir cada letra de la palabra EULALIA en un papel, escoger una, calcular la probabilidad y comparar con "la misma probabilidad que" <ul style="list-style-type: none"> <li>- Igual probabilidad.</li> </ul>	No tiene destinatario. No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada. La tarea no da oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso. No hay un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.	Personal	Baja demanda. Tarea de procedimientos sin conexiones. Porque se centra en obtener una respuesta correcta.	No se trabaja la simetría y equiprobabilidad.  La tarea pregunta sobre, las letras que tienen la misma probabilidad, para esto solo necesita calcular la probabilidad de cada letra y comparar; y no sacar uno de los papelitos como se indica, ya que se da la palabra EULALIA. La tarea se plantea en la sección, <i>Evaluó mis aprendizajes</i> .

Tr <sub>21</sub>	Realizar las combinaciones utilizando el diagrama del árbol y comparar con "es más probable que".  - Combinación. - Diagrama del árbol.	No tiene destinatario. No posee incertidumbre, ya que la tarea es estructurada.	Personal	Alta demanda. Procedimientos con conexiones, porque usa el diagrama del árbol en sus combinaciones.	La tarea se plantea en la sección, <i>Evalúo mis aprendizajes</i> .
------------------	--	--	----------	--	---

Se ha analizado la reconstrucción de la organización matemática en el texto de sexto grado y podemos dar cuenta de los siguientes hechos didácticos:

$\varphi_1$ : La mayoría de las tareas abordan situaciones que tienen que ver con lanzar el dado, monedas, y rifas.

*Indicadores:*

- El 81% de las tareas (17 tareas de 21) se refieren a situaciones o juegos de lanzar el dado, lanzar monedas y rifas.

$\varphi_2$ : La mayoría de las tareas referidas a situaciones o juegos de lanzar el dado, lanzar monedas y rifas, no trabaja o deja de lado la simetría: que ninguno de los sucesos posibles debe tener mayor ventaja que otro; la misma que no debe separarse de la equidistribución por ser la equidistribución y simetría una idea estocástica fundamental. El trabajo de esta idea estocástica es fundamental en los estudiantes, ya que destierra la creencia de que hay resultados más fáciles que otros.

*Indicadores:*

- El 94% (16 tareas de 17) de las tareas referidas a situaciones o juegos de lanzar el dado, lanzar monedas y rifas no trabaja la idea de simetría sin dejar de lado la equidistribución.
- Solo el 0,06% (una tarea) hace referencia a la idea de simetría.

$\varphi_3$ : Las tareas se describen en contextos personales.

*Indicadores:*

- Las tareas afectan de manera inmediata al estudiante, pues están relacionadas con sus actividades diarias o cotidianas.

- No hay tareas en situaciones: educativas o de contexto escolar, público o propio de la comunidad donde el estudiante está inmerso.

$\varphi_4$ : Las tareas no reúnen todas las características planteadas por Wiggins para ser una tarea auténtica.

*Indicadores:*

- El 100% de las tareas (21 tareas) no tiene destinatario, es decir, no están dirigidas a interlocutores reales que puedan percibir sus resultados y opinar sobre ellos.
- El 100% de las tareas (21 tareas) son estructuradas.
- El 86% de las tareas (18 tareas de 21) no dan oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso.
- El 76% de las tareas (16 tareas de 21) no tienen un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata.

$\varphi_5$ : La mayoría de las tareas son de baja demanda cognitiva.

*Indicadores:*

- El 90% de las tareas (19 tareas de 21) es de baja demanda cognitiva, de las cuales el 26% son memorísticas y el 74% son de procedimientos sin conexiones.
- Solo el 10% de las tareas (2 tareas de 21) son de alta demanda cognitiva: procedimientos con conexiones.
- No existen tareas para hacer estocástica.

$\varphi_6$ : Las ideas estocásticas fundamentales son abordadas mínimamente.

*Indicadores:*

- Se abordan el 33% de las ideas estocásticas fundamentales (4 de 12): La probabilidad como normalización de nuestras creencias, el conjunto de todas las

posibilidades, las leyes de los grandes números y la combinación, pero con dificultad.

- El 67% (8 de 12): de las ideas estocásticas fundamentales no son abordadas (intuitivamente).

$\varphi_7$ : Hay tareas y técnicas poco claras y aisladas.

*Indicadores:*

- La tarea 1 no menciona que debe extraer el papel sin mirar o al azar. Esto es importante para asegurar la simetría y equiprobabilidad.
- La tarea 1 está en la p. 198, mientras que su técnica 3 se encuentra en la p. 199.
- En la tarea 2, viñeta 3, dice: “Se sabe cuáles son los posibles resultados: cara o sello”. Ya se da la respuesta; por ello, carece de sentido. En esta tarea, no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- En la tarea 3, viñeta 2, dice: “Pero sí se sabe que el resultado será un número del 1 al 6”, esto es una afirmación, no constituye una tarea lo cual resulta confuso para el estudiante. En esta tarea, no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- En la tarea 4, no se da la indicación de sacar los papелitos sin mirar, esto es importante porque ninguno de los sucesos posibles debe tener mayor ventaja que otro (simetría). Además, se debe hacer reflexionar sobre esto; en consecuencia, no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- En la tarea 4, el tercer guión, dice: “Lo único que se sabe es que el nombre corresponde a un alumno de la clase”. Esto es una afirmación y podría considerarse una respuesta a la pregunta anterior, no es una tarea y por tanto es confuso para el estudiante.

- La tarea 5 retoma la tarea 1 (Escribe números del 1 al 10 en diferentes trozos de papel. Dóblalos, ponlos en una bolsa, mézclalos bien y extrae uno). En esta tarea, no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- En la tarea 6, no se menciona que el dado es no cargado y, en consecuencia, no se hace reflexionar sobre ello. No se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- En la tarea 7, no se precisa que el dado es no cargado; no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- En la tarea 7, se está trabajando también suceso simple y suceso compuesto, pero no hay preguntas que ayuden a la comparación, explicación y reflexión de este hecho.
- En la tarea 8, no se trabaja la simetría (la moneda debe ser no sesgada) y equiprobabilidad.
- La tarea 9, retoma la tarea 1 de la p. 198. (Escribe números del 1 al 10 en diferentes trozos de papel. Dóblalos, ponlos en una bolsa, mézclalos bien y extrae uno). Esta tarea no trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- En la tarea 9, la pregunta A es confusa, se pregunta por el suceso más probable, pero en ninguna de las alternativas hay un suceso más probable que otro. Asimismo, la pregunta C debe estar dirigida a comparar probabilidades para darle mayor sentido.
- En la tarea 10, la pregunta B se dice: “De los 3 sucesos que aparecen en A, ¿cuáles son improbables?”, pero en A aparecen 4 sucesos. Esto genera confusión en el estudiante.
- En la tarea 10 no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.

- En la tarea 11, las preguntas B y C, preguntan por el mas probable, pero la respuesta esta en igual probabilidad, debiera hacerse una pregunta mas abierta para que el estudiante escoja lo conveniente luego de hacer la comparación.
- En la tarea 11 no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- En la tarea 13 no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- En la tarea 14, la pregunta B dice: “¿Qué letra tiene la mayor probabilidad de ser escogida?”; se pregunta por una sola letra, pero hay dos letras con mayor probabilidad. Esto genera confusión en el estudiante.
- En la tarea 15, los estudiantes deben establecer una proporcionalidad para comparar la probabilidad. Aquí se presentan sucesos compuestos y, en primera instancia, no se puede aplicar Laplace pues los resultados posibles no tienen la misma probabilidad; por ello, hay que hacer una transformación en la composición de los boletos de la rifa mediante la simulación de urnas para asegurar la equiprobabilidad sin alterar la probabilidad de obtener una rifa en ambas urnas (familias). Esto no se hace ver al niño, más por el contrario se hacen procedimientos sin conexiones.
- En la tarea 16, la pregunta A es por el menos probable, pero el par azul y negro tienen la misma probabilidad; al parecer la pregunta pretende provocar un conflicto cognitivo.
- En la tarea 16, no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- En la tarea 17, no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- En la tarea 19, no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.
- La tarea 20 pregunta sobre las letras que tienen la misma probabilidad, para esto solo necesita calcular la probabilidad de cada letra y comparar y no sacar uno de los papelitos como se indica ya que se da la palabra EULALIA.
- En la tarea 20, no se trabaja la simetría y equiprobabilidad.

- Las técnicas,  $\tau_{51}$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{54}$ ,  $\tau_{112}$ ,  $\tau_{119}$ , son aisladas.

$\varphi_8$ : Existen tecnologías poco claras.

*Indicadores:*

- Las tecnologías de la tarea 1 son:

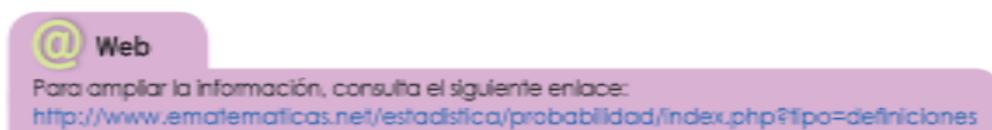
$\theta_{11}$ : Vamos a llamar suceso a todo acontecimiento que puede ocurrir o no. (pág.198).

$\theta_{21}$ : ...los sucesos pueden ser posibles, seguros, imposibles y probables. (pág.198).

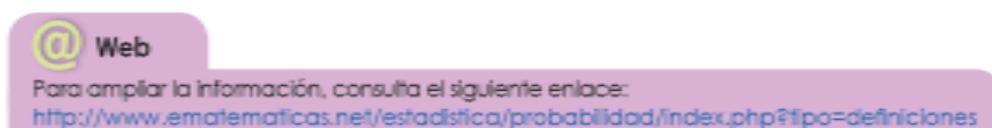
$\theta_{31}$ : ... si los sucesos A y B tienen la misma cantidad de posibilidades, se dice que la probabilidad de que ocurra A es igual a la probabilidad de que ocurra B (pág.199).

Como se puede observar, ninguna de las tecnologías hace referencia a espacio muestral y probabilidad. Debe haber una secuencia ya que en quinto grado hay como previo experimento no determinístico.

- No hay tecnología para la tarea 4 donde se trabaja también el espacio muestral.
- La tecnología 2 de la tarea 5, refiere visitar la una dirección web para ampliar la información. Se debe entender que el estudiante del grado debe ampliar su conocimiento con la información teórica que en ella se muestra.



- Las tecnologías de la tarea 7 no abordan el suceso simple y compuesto.
- Las tecnologías de la tarea 8 no abordan la definición frecuencial, en tanto en la tarea se trabaja esta noción.
- La tecnología 4 de la tarea 9 refiere a la dirección web tal como se muestra.



Se debe entender que el estudiante del grado debe visitar la web y ampliar su conocimiento con la información teórica que en ella se muestra.

- En las tecnologías de la tarea 10, no se define improbable, tampoco menos probable.
- En la tecnología 1 de la tarea 11, se hace referencia a la equiprobabilidad como: ” ...Cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad, porque, de los cuatro, uno tendrá que salir de todas maneras. (pág. 212) “, pero no se hace la reflexión de ello en la tarea.
- No hay tecnología que defina “igualmente probable” para la tarea 11.
- La tecnología de la tarea 12 define fenómeno aleatorio; sin embargo, en la tarea se habla de experimento aleatorio. Esto genera confusión en el estudiante.
- En las tecnologías de la tarea 13, no se define “menos probable”.
- Hay ausencia de tecnología para la tarea 16, pues no se define menos probable.
- No hay tecnología para la tarea 17, sobre suceso compuesto y su espacio muestral.
- En las tecnologías para la tarea 19, no se define menos probable.

$\varphi_9$ : El abordaje de la estocástica en el sexto grado está dado mayormente a comparar probabilidades y encontrar todos los posibles resultados (espacio muestral).

*Indicadores:*

- Las técnicas  $\tau_{71}$ ,  $\tau_{16}$ ,  $\tau_{108}$ ,  $\tau_{29}$ ,  $\tau_{111}$ ,  $\tau_{211}$ ,  $\tau_{311}$ ,  $\tau_{116}$ ,  $\tau_{420}$  y  $\tau_{221}$  corresponden a comparar probabilidades con igualmente probable; las técnicas  $\tau_{16}$ ,  $\tau_{37}$ ,  $\tau_{57}$ ,  $\tau_{58}$ ,  $\tau_{19}$ ,  $\tau_{110}$  y  $\tau_{310}$  corresponden a comparar probabilidades con más probable. Las técnicas  $\tau_{59}$ ,  $\tau_{410}$ ,  $\tau_{213}$   $\tau_{216}$  comparan probabilidades con menos probable, y las técnicas  $\tau_{32}$ ,  $\tau_{35}$ ,  $\tau_{78}$ ,  $\tau_{113}$  y  $\tau_{117}$  se abocan a encontrar todos los resultados posibles o el espacio muestral.

$\varphi_{10}$ : Existen tarea para la evaluación de los aprendizajes

*Indicadores:*

- Las tareas 19, 20 y 21 se plantean en la sección, *Evalúo mis aprendizajes*.
- Dos de las tres tareas son de baja demanda cognitiva, procedimientos con conexiones y una de ellas es de alta demanda cognitiva, procedimientos con conexiones.
- Las tres tareas evalúan la comparación de probabilidades. La tarea 19 evalúa menos probable y su justificación; la tarea 20 evalúa la igualdad de probabilidades; la tarea 21 evalúa es más probable que, y para esto debe realizar combinaciones haciendo uso del diagrama del árbol.

**4.4.4.5 Lo que no hay y podría haber.**

A continuación, presentamos una tabla que nos ayudará a visualizar qué es lo que hay en el texto de sexto grado en relación a las ideas estocásticas fundamentales y qué es lo que no hay y podría haber.

**Tabla 22.**

*Lo que hay, lo que no hay y podría haber en el texto de sexto grado en relación a las ideas estocásticas fundamentales*

<b>Ideas estocásticas fundamentales</b>	<b>Lo que hay</b>	<b>Lo que podría haber</b>
La probabilidad como normalización de nuestras creencias.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Situación aleatoria.</li> <li>- “más probables” o “menos probables”</li> <li>- Casos favorables a un suceso</li> <li>- Probabilidad como fracción.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad clásica.</li> <li>- Comparación de probabilidades: por correspondencia, proporcionalidad y multiplicativa usando fracciones. Sucesos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.</li> <li>- Nociones de operaciones con sucesos</li> <li>- Suceso exhaustivo.</li> </ul>
El conjunto de todas las posibilidades. Equidistribución y simetría.	Posibles resultados de una situación aleatoria.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Espacio muestral.</li> <li>- Equiprobabilidad del espacio muestral (igualdad de probabilidad).</li> <li>- No equiprobabilidad del espacio muestral</li> </ul>

---

Regla de adición de probabilidades.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ninguno de los resultados posibles tiene mayor ventaja que el resto (simetría).</li> <li>- Cálculo de la probabilidad del suceso compuesto a partir de sus sucesos simples usando el diagrama de árbol.</li> </ul>
Independencia y regla del producto.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Noción de sucesos mutuamente excluyentes.</li> <li>- Condiciones para la regla del producto: nociones de, sucesos mutuamente excluyentes, sucesos dependientes, sucesos independientes.</li> </ul>
Probabilidad Condicional. Independencia. Combinatoria. La variable aleatoria.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Noción de suceso dependiente.</li> <li>- Noción de suceso independiente.</li> <li>- Diagrama del árbol para combinar.</li> <li>- Encontrar el número de puntos a conseguir en juegos y experimentos (dados, monedas, otros). (variable aleatoria discreta).</li> <li>- Estimar el tiempo de espera del bus, la temperatura ambiente, otros (variable aleatoria continua).</li> </ul>
Las leyes de los grandes números. Muestreo. Simulación.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad mediante frecuencia relativa: ensayos hasta 300.</li> <li>- Determina una muestra al azar.</li> <li>- Sustituye convenientemente el experimento de la realidad por otro experimento al azar. Ejemplo: La cantidad de boletos que poseen dos familias para una rifa por dos urnas con bolas que representes los boletos.</li> </ul>

---

*Comentario:* Los conceptos que se plantean respecto a la probabilidad resultan insuficientes para tener una idea intuitiva de la probabilidad como normalización de nuestras creencias, pues al respecto su abordaje en el grado está dedicado a comparar probabilidades; entonces, podría abordarse la probabilidad clásica. Las operaciones con sucesos, sucesos exhaustivos, sucesos dependientes e independientes podrían abordarse de manera intuitiva, así como la combinatoria a partir del uso del diagrama del árbol.

También, podría haber el tratamiento intuitivo de la variable aleatoria a partir de encontrar el número de puntos a conseguir en juegos y experimentos (dados, monedas, otros) y de estimar el tiempo de espera del bus, la temperatura ambiente, otros.

Asimismo, podría haber el tratamiento intuitivo de las leyes de los grandes números a partir de encontrar la probabilidad mediante la frecuencia relativa con ensayos de hasta 300; el tratamiento del muestreo determinando una muestra pequeña al azar, y la simulación; por ejemplo, sustituyendo convenientemente el experimento de la realidad (cantidad de boletos que poseen dos familias para una rifa) por otro experimento al azar (dos urnas con bolas que representes los boletos).

#### **4.5 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos**

- Análisis de los siguientes documentos:
  - ❖ Programa Curricular de primaria V ciclo.
  - ❖ Orientaciones metodológicas de las Rutas de Aprendizaje V ciclo.
  - ❖ Texto de matemática del quinto grado de educación primaria.
  - ❖ Texto de matemática del sexto grado de educación primaria.

#### **4.6 Técnicas de Análisis de Datos**

- Transcripción y clasificación de la información.
- Análisis de las categorías y subcategorías.
- Estadística descriptiva.
- Tablas y comparación de información.

#### **4.7 Procedimiento**

En la presente investigación, se han realizado los siguientes pasos:

- Se ha recolectado información de importancia, epistemológica, didáctica y psicológica para esta investigación y antecedentes.
- Se ha realizado una organización del marco teórico y precisado la bibliografía para el logro de los objetivos propuestos.
- Se ha analizado:

- ✎ Los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en el Programa Curricular de Educación Primaria del V ciclo.
  - ✎ Los tratamientos didácticos del sentido estocástico en las orientaciones metodológicas de las rutas del aprendizaje del V ciclo.
  - ✎ La praxeología matemática y didáctica del sentido estocástico en los textos de matemática del V ciclo, y las transformaciones matemáticas que ha sufrido el saber sabio, saber a enseñar y saber escolar del sentido estocástico en el V ciclo.
- Se ha descrito:
- ✎ La praxeología matemática y didáctica del sentido estocástico en los textos de matemática del V ciclo, y las las transformaciones matemáticas que ha sufrido el saber sabio, saber a enseñar y saber escolar del sentido estocástico en el V ciclo.
  - ✎ Las técnicas de análisis de los datos.
  - ✎ Hechos e indicadores didácticos.

## Capítulo V. Resultados

### 5.1 Presentación y Análisis de los Resultados

#### 5.1.1 Respecto al Programa Curricular de Educación Primaria del V ciclo.

##### *Sobre el estándar de la competencia y sus capacidades:*

- Respecto al tratamiento del contenido matemático (conocimientos) presentes en los Estándares de aprendizaje de la competencia, “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre”, teniendo en cuenta los criterios de precisión, coherencia y progresión con el nivel previo (IV ciclo) y posterior (VI ciclo) del V ciclo, se ha encontrado que en el V ciclo se aborda experimento aleatorio. Sin embargo, en el nivel previo no se aborda, más aún cuando se está trabajando suceso seguro y comparando probabilidades. Asimismo, se aborda la probabilidad de un suceso relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles; es decir, la definición de la probabilidad desde el punto de vista Laplaciano, pero no se contempla el espacio muestral, lo cual si se considera en el VI ciclo. Además, las estructuras conceptuales no se relacionan con sistemas de representación que permitan articular un tema y darle significado. Por todo lo antes señalado, podemos decir que hay evidencias de que la coherencia, progresión y precisión se debe mejorar en el estándar.

También se ha encontrado, respecto a las ideas estocásticas fundamentales en el V ciclo (solo se aborda una de ellas), la probabilidad como normalización de nuestras creencias, pero con dificultad, pues no están presentes; por ejemplo: sucesos y sus tipos. Por ello, los conocimientos de las matemáticas escolares que están presentes en el estándar son insuficientes como objeto de enseñanza y aprendizaje en esta organización.

- Respecto al tratamiento didáctico del sentido estocástico, teniendo en cuenta el criterio de progresión con el nivel anterior y posterior al V ciclo referido a la estocástica, se ha encontrado que el operador “Resolver”, referido a problemas, plasmados en el IV, V y VI ciclo es el mismo. Además, podría entenderse que afecta solo a la gestión de datos y no a la incertidumbre; con la cual, la primera capacidad “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas” quedaría exenta del propósito didáctico, sobre todo en lo referido a la incertidumbre. Asimismo, no sería un referente claro para la evaluación, la elaboración de materiales educativos y la formación docente.

También se ha encontrado que en la segunda capacidad, “Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos”, no se visibiliza una organización de aprendizajes referidos a la incertidumbre; por tanto, no existe progresión.

Obsérvese:

- *En el IV ciclo:* Recolecta datos a través de encuestas y entrevistas sencillas, registra en tablas de frecuencia simples y los representa en pictogramas, gráficos de barra simple con escala (múltiplos de diez).
- *En el V ciclo:* Selecciona tablas de doble entrada, gráficos de barras dobles y gráficos de líneas, seleccionando el más adecuado para representar los datos.
- *En el VI ciclo:* Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas de datos agrupados. Así también, determina la media aritmética y mediana de datos discretos; representa su comportamiento en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos circulares, tablas de frecuencia y medidas de tendencia central;

En la tercera capacidad “Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos” se ha encontrado que, mientras que en el IV ciclo el estudiante expresará la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable, en el V ciclo este debe realizar experimentos aleatorios, reconocer sus posibles resultados y expresar la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. En el VI ciclo debe expresar la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, interpretar sucesos y asociar a los valores 0 y 1, como se puede ver la progresión de IV a V ciclo queda poco claro en cuanto a los conocimientos, y hay cierto traslape que se da con la capacidad “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas”; mientras que del V ciclo al VI ciclo la progresión se rompe en cuanto a los conocimientos, pues en el V ciclo ya se trabaja la probabilidad Laplaciana y en el VI ciclo se le pide la probabilidad como fracción. Por tanto, no se evidencia una buena progresión.

Respecto a la cuarta capacidad, “Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida”, se ha encontrado que, en el IV ciclo que el estudiante debe justificar su respuesta, pero esto podría entenderse que se refiere a lo de, Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable por la forma en que se presenta la redacción, veamos:

Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable y justifica su respuesta.

En el V ciclo, el estudiante debe justificar sus predicciones, conclusiones y decisiones basándose en la probabilidad de un evento; sin embargo, la justificación de sus decisiones ya no se toma en cuenta para el VI ciclo, pues aquí solo justifica

sus predicciones sobre la ocurrencia de eventos. Por ello, podemos decir que, del V ciclo al VI ciclo no hay mayor nivel de complejidad que el anterior.

No se evidencia el tratamiento de las situaciones en diferentes contextos; solo en el IV ciclo se menciona que debe expresar la ocurrencia de sucesos cotidianos.

Respecto a la precisión y coherencia en el V ciclo referido a la estocástica, las capacidades “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas” y “Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos” no hacen referencia a la incertidumbre.

Por todo lo antes señalado, podemos decir que el estándar del V ciclo no será un buen referente para la evaluación de los aprendizajes, pues genera interrogantes sobre el objeto de enseñanza y aprendizaje, y los propósitos que se espera para el ciclo.

*Sobre los desempeños del V ciclo:*

- Respecto al tratamiento del contenido matemático (conocimientos) presentes en los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del quinto grado de primaria, se ha encontrado que el primer desempeño que refiere a la primera capacidad, “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas”, no se visibiliza el contenido conceptual referido a la incertidumbre; observemos:

Representa las características de una población en estudio, las que asocia a variables cualitativas (por ejemplo, color de ojos: pardos, negros; profesión: médico, abogado, etc.) y cuantitativas discretas (por ejemplo, número de hermanos: 3, 2; cantidad de goles: 2, 4, 5, etc.), así como también el comportamiento del conjunto de datos, a través de pictogramas verticales y horizontales (cada símbolo representa más de una unidad), gráficos de barras

con escala dada (múltiplos de 10), la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como punto de equilibrio.

Sin embargo, en la definición de esta capacidad se dice "... implica el análisis de situaciones aleatorias y representar la ocurrencia de sucesos mediante el valor de la probabilidad" (MINEDU, 2016, p. 263); tampoco se asocia a una situación, esto es importante pues permite dar significado al concepto. Hay ausencia respecto de las acciones que permite operar al interior de esta capacidad en lo referido a la incertidumbre.

En el desempeño que refiere a la capacidad "Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos" dice: Expresa su comprensión de la moda como la mayor frecuencia y la media aritmética como punto de equilibrio; así como todos los posibles resultados de la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones "seguro", "más probable" y "menos probable". Este desempeño está en correlato con el estándar de IV ciclo y no con el de V ciclo en lo que se refiere a la incertidumbre. Observemos los estándares de IV ciclo y el de V ciclo:

*Estándar del IV ciclo:*

*Resuelve problemas* relacionados con datos cualitativos o cuantitativos (discretos) sobre un tema de estudio, recolecta datos a través de encuestas y entrevistas sencillas, registra en tablas de frecuencia simples y los representa en pictogramas, gráficos de barra simple con escala (múltiplos de diez). Interpreta información contenida en gráficos de barras simples y dobles y tablas de doble entrada, comparando frecuencias y usando el significado de la moda de un conjunto de datos; a partir de esta información elabora algunas conclusiones y toma decisiones. Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable y justifica su respuesta.

*Estándar del V ciclo:*

*Resuelve problemas* relacionados con temas de estudio, en los que reconoce variables cualitativas o cuantitativas discretas, recolecta datos a través de encuestas y de diversas fuentes de información. Selecciona tablas de doble entrada, gráficos de barras dobles y gráficos de líneas, seleccionando el más adecuado para representar los datos. Usa el significado de la moda para interpretar información contenida en gráficos y en diversas fuentes de información. Realiza experimentos aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Elabora y justifica predicciones, decisiones y conclusiones, basándose en la información obtenida en el análisis de datos o en la probabilidad de un evento.

En la definición de esta capacidad Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos, se dice: “es comunicar su comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en relación a la situación. Leer, describir e interpretar información estadística contenida en gráficos o tablas provenientes de diferentes fuentes” (MINEDU, 2016, p. 263). Hay ausencia respecto de las acciones que permite operar al interior de esta capacidad en lo referido a la incertidumbre.

Asimismo, el desempeño que refiere a la capacidad “Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida” dice: Predice la mayor o menor frecuencia de un conjunto de datos, o si la posibilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro. Así también, explica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos. Este desempeño también está en correlato con el estándar de IV ciclo y no con el de V ciclo en lo que se refiere a la incertidumbre.

En los desempeños del quinto grado, hay vacíos conceptuales; por ejemplo, el tema de situación o experimento aleatorio, la equiprobabilidad y no equiprobabilidad del espacio muestral y la posibilidad de mayor ocurrencia de un suceso con respecto a otro.

- Respecto al tratamiento del contenido matemático (conocimientos) presentes en los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del sexto grado de primaria, se ha encontrado que ninguno de los desempeños registra el contexto el cual es importante para el significado de los conceptos. A diferencia de quinto grado, aquí si se ve la situación aleatoria; en tal sentido, no hay una progresión con el IV ciclo. Los conceptos giran en determinar la probabilidad y no se hace un trabajo intuitivo de la mayoría de las ideas estocásticas fundamentales (la probabilidad como normalización de nuestras creencias, el conjunto de todas las posibilidades, equidistribución y simetría, regla de adición de probabilidades, independencia y regla de productos, probabilidad condicional, independencia, combinatoria, variable aleatoria, las leyes de los grandes números, el muestreo, la simulación).
- Respecto al tratamiento didáctico del sentido estocástico en los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del quinto grado de primaria, podemos afirmar que hay vacíos y no hay una secuencia en las expectativas de aprendizaje en quinto grado con respecto a la incertidumbre, porque, por ejemplo, no se describen las acciones de la incertidumbre para la primera capacidad; el uso de las expresiones “más probable” y “menos probable” significa que ya se ha establecido la medida de la posibilidad. Sin embargo, en este grado aún no se haya la probabilidad de un suceso y tampoco se describen el espacio muestral o se verifica la equiprobabilidad; es por ello, que no se evidencia una secuencia en las expectativas de aprendizaje. En consecuencia, podemos decir

que se puede mejorar la organización de los aprendizajes para mostrar de la combinación de las capacidades que permitan el desarrollo de la competencia y su seguimiento mediante la evaluación, y el docente pueda plantear programaciones coherentes para el trabajo en el aula.

- Respecto al tratamiento didáctico del sentido estocástico en los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del sexto grado de primaria, podemos afirmar que hay vacíos en las expectativas de aprendizaje en sexto grado con respecto a la incertidumbre, porque se trabaja el espacio muestral y la probabilidad como fracción; sin embargo, en este grado los estudiantes ya trabajan los decimales hasta el centésimo y los porcentajes usuales. Por tal razón, pueden expresar la probabilidad como fracción, decimal y porcentajes usuales.

La capacidad “Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos” se define en el Programa Curricular del nivel primario como “es comunicar su comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en relación a la situación. Leer, describir e interpretar información estadística contenida en gráficos o tablas provenientes de diferentes fuentes” (MINEDU, 2016, p. 263)

Si bien se interpreta la información estadística, no se explicita la interpretación de los casos favorables y el total de casos posibles en la probabilidad de un suceso. En consecuencia, podemos decir que se puede mejorar la organización de los aprendizajes para que se impacte de mejor manera en el diseño y organización del trabajo de aula en este grado y, sobre todo, en la evaluación.

### **5.1.2 Respeto a las orientaciones metodológicas de las rutas del aprendizaje del V ciclo.**

- Los hallazgos son sobre el apartado 3.4.2. (p.130-131) en el cual se presenta las sugerencias de materiales y propuesta de actividades referidos a la estocástica. Por tanto, resulta insuficiente, porque se ha encontrado que no se abordan los conceptos del saber sabio referido a la estocástica, un aspecto importante por ser un documento dirigido al maestro.
- Respecto al saber a enseñar, se ha encontrado que los materiales que se proponen como dados, monedas, ruletas, bolas de diferentes colores y juego de cartas no han sido diseñados con fines educativos. Por tanto, no estaría en la categoría de materiales educativos, como se menciona en el documento, sino más bien en el de recursos didácticos. Cabe destacar que los materiales y recursos didácticos son parte de los organizadores curriculares con los que se planifica la enseñanza en el aula y son importantes, porque a partir de su manipulación, los estudiantes pueden hacer abstracciones y darles sentido a los conceptos matemáticos.

Las actividades propuestas en su mayoría son estructuradas y de baja demanda cognitiva pasando por las memorísticas y de procedimientos sin conexiones. Las mismas plantean enseñar los conceptos de: experimento no aleatorio, espacio muestral, suceso, suceso seguro, suceso imposible, probabilidad como fracción, comparación de probabilidades con más probable, y a través de representaciones como, pares ordenados, diagrama de árbol y tablas. El abordaje de las ideas estocásticas fundamentales es mínimo.

No se menciona nada respecto de la evaluación y cómo se debe organizar los espacios educativos para este trabajo.

En consecuencia, por todo lo antes dicho, podemos concluir que las orientaciones son insuficientes para que el docente plante un diseño de unidad didáctica para una enseñanza efectiva en lo referido a la estocástica.

### **5.1.3 Respecto a los textos de matemática del V ciclo.**

- Las tareas en ambos textos (28 tareas) no reúnen las características planteadas por Wiggins para ser una tarea auténtica porque: no tienen destinatario; es decir, no están dirigidas a interlocutores reales que puedan percibir sus resultados y opinar sobre ellos. Además, el 78,5%, en promedio, son tareas estructuradas (22 tareas). En promedio, el 86% de las tareas no dan oportunidades para ensayar y dar devoluciones en el proceso (24 tareas). El 66,5%, en promedio de las tareas, no tienen un repertorio amplio de recursos cognitivos, ya que la tarea se resuelve de manera inmediata (19 tareas).
- La mayoría de las tareas de ambos textos son de baja demanda cognitiva, porque: el 73,5%, en promedio, son de baja demanda cognitiva (21 tareas); de los cuales el 25,5%, en promedio, son tareas de memorización y el 74,5%, en promedio, son tareas de procedimientos sin conexiones. El 26,5%, en promedio, son tareas de alta demanda cognitiva y que corresponden a procedimientos con conexiones (7 tareas). En ninguno de los textos existen tareas para hacer estocástica; es decir, tareas que lleven a crear, emitir juicios de valor, monitorear y autorregular sus procesos cognitivos, promover el pensamiento crítico, entre otros.
- Las tareas en ambos textos se describen solo en contextos personales que afectan de manera inmediata al estudiante, pues están relacionadas con sus actividades diarias o cotidianas, y no hay tareas en situaciones: educativas o de contexto escolar, público o propio de la comunidad donde el estudiante está inmerso.

- El abordaje de la estocástica en ambos textos está dado mayormente a comparar probabilidades. Es así que las técnicas del texto quinto grado:  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{24}$ ,  $\tau_{75}$ ,  $\tau_{85}$  y  $\tau_{46}$  corresponden a comparar con más probable y se relacionan con las técnicas del texto de sexto grado:  $\tau_{16}$ ,  $\tau_{37}$ ,  $\tau_{57}$ ,  $\tau_{58}$ ,  $\tau_{19}$ ,  $\tau_{110}$  y  $\tau_{310}$  que corresponden también a comparar probabilidades con más probable. Las técnicas en quinto grado,  $\tau_{34}$ ,  $\tau_{65}$  y  $\tau_{66}$  que trabajan la comparación de igualmente probable se relacionan con las técnicas de sexto grado,  $\tau_{71}$ ,  $\tau_{16}$ ,  $\tau_{108}$ ,  $\tau_{29}$ ,  $\tau_{111}$ ,  $\tau_{211}$ ,  $\tau_{311}$ ,  $\tau_{116}$ ,  $\tau_{420}$  y  $\tau_{221}$  que corresponden también a comparar probabilidades con igualmente probable. La técnica  $\tau_{57}$  de quinto grado que compara con menos probable se relaciona con las técnicas de sexto grado  $\tau_{59}$ ,  $\tau_{410}$ ,  $\tau_{213}$  y  $\tau_{216}$  que comparan también probabilidades con menos probable. Por ello, podemos decir que la mayoría de las técnicas están mayormente relacionadas a la capacidad de: “Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos: es seleccionar, adaptar, combinar o crear una variedad de procedimientos, estrategias y recursos para recopilar, procesar y analizar datos, así como el uso de técnicas de muestreo y el cálculo de las medidas estadísticas y probabilísticas”. (MINEDU, 2016, p. 263). Además, agregamos que la comparación de probabilidades está dado en el estándar del IV ciclo.
- Hay técnicas aisladas; en quinto grado, las técnicas aisladas son:  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$  y  $\tau_{17}$ ; y en el sexto grado, las técnicas aisladas son:  $\tau_{51}$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{54}$ ,  $\tau_{112}$ ,  $\tau_{119}$ .
- Las ideas estocásticas fundamentales en ambos textos son trabajadas en promedio en un 25%. (3 de 12); entre ellas está el abordaje de la probabilidad como normalización de nuestras creencias, el espacio muestral, las leyes de los grandes números, pero son abordados con dificultades pues no se hace un trabajo intuitivo. Respecto a la probabilidad como normalización a nuestras creencias, en ambos grados no se trabaja la división de la realidad de manera reflexiva; es decir, no se

hace un estudio de la realidad en la que se observe la situación en un contexto determinado para saber si hay incertidumbre o no y a partir de ello reconocer una situación determinada y una situación aleatoria como división de la realidad. La caracterización de la situación aleatoria no se hace visible (el contexto, las restricciones, las condiciones, el espacio muestral, el suceso simple y compuesto). Asimismo, no se ejemplifican más allá de los juegos de azar las situaciones aleatorias o de incertidumbre, reproducibles y no reproducibles sabiendo que la mayoría de las situaciones que se dan en la vida cotidiana son de incertidumbre. Consecuentemente, al no estar esto claro, lo anterior, no podemos asociarle una probabilidad y mucho menos interpretar la probabilidad de hechos y sucesos en la realidad que le dio origen. Por tanto, la observación y el conocimiento de la realidad para asociarlo a su probabilidad y luego interpretarla, carece de conexiones y significado.

- El 81% de las tareas (17 tareas) de sexto grado se refieren a situaciones o juegos de lanzar el dado, lanzar monedas y rifas.
- Hay tareas poco claras como: la primera pregunta de la tarea 5 de quinto grado, se dice: ... ¿cuál de los dos tiene más posibilidades de extraer una bolita roja?, esto es confuso para el estudiante, ya que se ha establecido anteriormente que se debe decir más probable y no “más posibilidades” (más posible). En esta tarea 5, se presentan sucesos compuestos que tienen que ver con todo lo antes señalado pues, en primera instancia, no se puede aplicar Laplace, pues los resultados posibles no tienen la misma probabilidad; por ello, hay que hacer una transformación en la composición de los bolsillos mediante la simulación de urnas para asegurar la equiprobabilidad sin alterar la probabilidad de obtener una bolita roja, verde o azul en ambas urnas (bolsillos).

- En sexto grado, en algunos casos no hay tareas sino afirmaciones, como, por ejemplo: En la tarea 3, viñeta 2, dice: “Pero sí se sabe que el resultado será un número del 1 al 6”; la tarea 4, el tercer guión dice, “Lo único que se sabe es que el nombre corresponde a un alumno de la clase”.
- En la tarea 9 de sexto grado, la pregunta A es confusa. Se pregunta por el suceso más probable, pero en ninguna de las alternativas hay un suceso más probable que otro. Asimismo, la pregunta C debe estar dirigida a comparar probabilidades para darle mayor sentido. En la tarea 10 de sexto grado, la pregunta B, dice: “De los 3 sucesos que aparecen en A, ¿cuáles son improbables?”, pero en A aparecen 4 sucesos. En la tarea 14 de sexto grado, la pregunta B dice: “¿Qué letra tiene la mayor probabilidad de ser escogida? “; se pregunta por una sola letra, pero hay dos letras con mayor probabilidad. En la tarea 16 de sexto grado, la pregunta A es por el menos probable, pero el par azul y negro tienen la misma probabilidad; al parecer la pregunta pretende provocar un conflicto cognitivo. La tarea 20 de sexto grado pregunta sobre las letras que tienen la misma probabilidad, para esto solo necesita calcular la probabilidad de cada letra y comparar y no sacar uno de los papelitos como se indica, ya que se da la palabra EULALIA.
- Hay tecnologías poco claras como la tecnología,  $\theta_{22}$  de quinto grado: Un suceso determinista es un experimento o fenómeno que da lugar a un resultado cierto o seguro (pág.202). Se entiende al suceso determinista como experimento o fenómeno y no se habla de situación determinista; sin embargo, la tarea pide situaciones de su vida cotidiana que sean sucesos deterministas. Entonces, debe quedar claro lo que es situación, experimento, fenómeno y suceso determinista para evitar confusiones en el estudiante.

La tecnología,  $\theta_{13}$  de quinto grado: En la vida diaria, la información se presenta de... manera indeterminada, con probabilidades de adoptar valores diferentes según las circunstancias (pág.194). Aquí se pretende dar una idea de situación aleatoria, pero no queda claro, en tanto se entiende que la información se da en la vida de manera indeterminada; es decir, una información no definida. La palabra indeterminada no es adecuada para el grado. No se relaciona con la incertidumbre y con el conjunto de los posibles resultados (espacio muestral), pues es lo único que se puede saber.

La tecnología de la tarea 12 define fenómeno aleatorio; sin embargo, en la tarea se habla de experimento aleatorio. Esto genera confusión en el estudiante.

- Hay ausencias de tecnologías en sexto grado, como: las tecnologías de la tarea 1 no definen probabilidad. Debe haber una secuencia, ya que en quinto grado hay como previo experimento el no determinístico.

Las tecnologías de la tarea 7, no aborda el suceso simple y compuesto.

Las tecnologías de la tarea 8, no abordan la definición frecuencial, en tanto en la tarea se trabaja esta noción.

En las tecnologías de la tarea 10, no se define improbable.

No hay tecnología que defina “igualmente probable” para la tarea 11.

En las tecnologías de las tareas 10, 13, 16 y 19, no se define “menos probable”.

No hay tecnología para la tarea 17 sobre suceso compuesto.

- Respecto al conjunto de todas las posibilidades, en sexto grado, las técnicas  $\tau_{32}$ ,  $\tau_{35}$ ,  $\tau_{78}$ ,  $\tau_{88}$ ,  $\tau_{113}$ ,  $\tau_{117}$ ,  $\tau_{59}$ ,  $\tau_{213}$  y  $\tau_{216}$  se refieren al trabajo del espacio muestral sobre cómo encontrar todos los posibles resultados, y no hay tecnología para las tareas 1, 4 y 17 donde se trabaja también el espacio muestral.

- Respecto a la equidistribución y simetría; la mayoría de las tareas deja de lado esta idea que es tan potente, pues permite desterrar la creencia de que hay resultados más fáciles que otros. En ambos grados, el 0,2%, en promedio (dos tareas), hace referencia a la simetría (ninguno de los sucesos posibles debe tener mayor ventaja que otro).

De las dos tareas que tienen que ver con urna y rifa planteadas en quinto grado y el 94% (16 tareas) de las tareas de sexto grado referidas a situaciones o juegos de lanzar el dado, lanzar monedas y rifas, no trabajan la idea de simetría sin dejar de lado la equidistribución.

- No hay organización matemática respecto a la regla de adición de probabilidades, la independencia y regla del producto, la probabilidad condicional, la Variable aleatoria, ley de los grandes números, y la simulación. También, a pesar que la tarea 21 de sexto grado tiene la técnica  $\tau_{121}$  que refiere a escribir la cantidad de combinaciones posibles después de haber elaborado el diagrama del árbol, podemos decir que no hay una organización matemática para la combinatoria.
- Existen tarea para la evaluación de los aprendizajes; estas tareas se plantean en la sección de los textos denominado *Evalúo mis aprendizajes*. En quinto grado, hay una tarea y en sexto grado hay tres tareas de las cuatro tareas; tres de ellas son de baja demanda cognitiva. La tarea de quinto grado evalúa de manera memorística sucesos deterministas y no deterministas, y todas las tareas de sexto grado evalúan la comparación de probabilidades (más probable y menos probable).

## 5.2 Discusión de Resultados

Los resultados obtenidos en esta investigación son válidos por la metodología utilizada; sin embargo, hemos tenido limitaciones de acceso a investigaciones referidas al sentido estocástico. Los resultados se pueden aplicar en otros contextos, pues como señala

Vásquez (2012) en su tesis Doctoral, la educación en la mayoría de los países se rige por las líneas establecidas en el currículo que recoge las políticas de cada país respecto al tipo de ciudadano que desea, según el interés de cada comunidad. Este fue uno de los motivos por los que se realizó esta investigación.

Además, uno de los recursos que ayuda a materializar de una forma más sistemática el currículo es el libro de texto y representa uno de los medios más utilizados en los diferentes niveles de los sistemas educativos: nivel primario, nivel medio y superior. Estos materiales son elaborados por grandes y pequeñas editoriales que confeccionan todo tipo de libros, pero dentro de los que se incluyen los libros de texto, en Latinoamérica, el Centro Regional para el Fomento del Libro en América Latina, El Caribe, España y Portugal, CERLALC (2010); señala que en el año 2009 existían unos 16,011 agentes editores que registraron libros en las agencias ISBN. Brasil es el país con el mayor número de editores, 4523; seguido por Colombia, Argentina, México y Chile; Honduras 158. Estos datos dan una idea acerca de la gran cantidad de libros que se editan en América Latina. Estos incluyen muchos libros de texto que se utilizan en los niveles básicos de la escuela como también en el nivel universitario; bajo estas condiciones no es difícil darse cuenta que, en la mayoría de los casos, estos no responderán a las necesidades e intereses de los escolares y universitarios, como es el caso de nuestro país.

Por razones epistemológicas y didácticas, es importante elaborar criterios de análisis de la organización matemática propuesta en los textos escolares; como lo evidencian los trabajos de investigación de Gonzales (2014), Becerra (2015), Carrillo (2013) y Chirinos (2004), quienes utilizan la teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999), que se enfoca en el estudio de las praxeologías para el análisis de la organización matemática y organización didáctica de los textos escolares y de actividad docente dentro del aula de clases. En esta línea, un estudio para una investigación ampliada puede resumirse en la

pregunta ¿Cuál es el impacto del libro de texto en el rendimiento académico de los estudiantes?

En el desarrollo de esta tesis, se complementa la teoría antropológica con las teorías de transposición didáctica y los planteamientos de Stein et al. (2000) para categorizar el nivel de las tareas matemáticas según la demanda cognitiva para el análisis de la organización matemática, de manera similar a los trabajos de Gonzales (2014) quien utilizó los criterios de completitud de Fonseca, y Osorio (2012) que se apoya en la teoría del enfoque ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemática. Esta última tesis propone la introducción natural del concepto de probabilidad desde una concepción subjetiva y, partiendo de la comprensión de lo que es una situación aleatoria, esta investigación es un referente, porque nos plantea una propuesta epistemológica para la introducción del concepto de probabilidad. La investigadora, de manera análoga a esta investigación, caracteriza y presenta componentes de la situación aleatoria: el contexto, las restricciones, el espacio muestral y el suceso, así como la interacción entre ellos, similarmente a los saberes del sentido estocástico que aborda esta tesis.

Cárcamo (2012) investiga el conocimiento pedagógico del material didáctico y el conocimiento curricular en relación al uso del libro de texto de matemática, se plantea: ¿Cuál es el uso que están haciendo los docentes de la Guía para el Maestro en la enseñanza de la matemática? Esto, en nuestro País, equivale al análisis de los fascículos de las rutas de aprendizaje, en la que los docentes deberían de encontrar una síntesis selectiva de los contenidos, una propuesta metodológica y de evaluación bien definida que les ayude a planificar y desarrollar mejor su clase.

## Conclusiones

Con la presente investigación hemos llegado a las siguientes conclusiones:

1. Los conocimientos estocásticos que están presentes en el estándar y los desempeños son insuficientes como objeto de enseñanza, aprendizaje y evaluación en esta organización, pues, como lo señala el Currículo Nacional de Educación Básica, los desempeños deben ayudar a los docentes en la planificación y evaluación; por ello, los ejemplos consignados en el documento deben ser los suficientes y claros.
2. En el Programa Curricular del nivel primario, no se presenta o hace referencia de manera intuitiva, a la mayoría de las ideas estocásticas fundamentales para el V ciclo: la probabilidad como normalización de nuestras creencias, el conjunto de todas las posibilidades, equidistribución y simetría, regla de adición de probabilidades, independencia y regla de productos, probabilidad condicional, independencia, combinatoria, variable aleatoria, las leyes de los grandes números, el muestreo y la simulación; lo cual resulta insuficiente para ir profundizando progresivamente estos conceptos.
3. Las capacidades “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas” y “Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos” del estándar del V ciclo no hacen referencia a la incertidumbre. La capacidad, “Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos” y la capacidad, “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas” se traslapan y no hay una progresión con el ciclo anterior y el siguiente. Esto último ocurre también con la capacidad “Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida”; generando un vacío en la organización matemática y didáctica, ya que no se podrá relacionar las

capacidades de la competencia en forma holística y combinada para el sentido estocástico, quedando limitado el desarrollo de esta competencia.

4. La organización matemática es incompleta en el estándar del V ciclo por cuanto no hay progresión, coherencia y precisión con el estándar del IV (anterior al ciclo) y el estándar del VI ciclo (posterior al ciclo-secundaria) respecto a las ideas estocásticas, las acciones, y los contextos en las cuales el concepto va adquiriendo sentido según lo plantean Rico y Segovia (2016). Por ejemplo, el operador “Resolver”, referido a problemas, plasmados en el estándar de la competencia del V ciclo, es el mismo, y el docente podría entender que “Resolver” afecta solo a la gestión de datos y no a la incertidumbre, con la cual la capacidad “Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas” quedaría exenta del propósito didáctico, sobre todo en lo referido a la incertidumbre.

Asimismo, No hay coherencia, precisión y progresión en algunos de los desempeños del V ciclo respecto de los contextos, acciones y conocimientos. Por cuanto el Currículo Nacional de Educación Básica señala que los estándares proporcionan información valiosa para retroalimentar a los estudiantes sobre su aprendizaje y ayudarlos a avanzar. Además, son referentes para los aprendizajes a nivel de aula y de sistema para la programación curricular, para la formación docente y para la elaboración de materiales educativos. Este propósito no se cumplirá en los niveles de demanda que se exige de la competencia.

5. Por lo anteriormente dicho, los tratamientos matemáticos y didácticos del sentido estocástico en el Programa Curricular de Educación Primaria del V ciclo tienen un desarrollo parcial con respecto a las ideas estocásticas fundamentales y su didáctica, y se acepta el primer supuesto hipotético.

6. En las orientaciones metodológicas de las rutas del aprendizaje del V ciclo, no se abordan los conceptos del saber sabio referido a la estocástica por lo que el docente no tendrá un referente claro en ese sentido. Asimismo, las actividades propuestas, en su mayoría son estructuradas y de baja demanda cognitiva, el abordaje de las ideas estocásticas fundamentales es mínima y no se trabaja nada sobre la evaluación. Por todo ello, los tratamientos didácticos del sentido estocástico en las orientaciones metodológicas de las rutas del aprendizaje del V ciclo son incompletas respecto a la organización del aprendizaje y las estrategias didácticas y se acepta el segundo supuesto hipotético, ya que, por ejemplo, el documento en mención, no permitirá que el docente plantee un diseño de unidad didáctica para una enseñanza efectiva en lo referido a la estocástica; más aún cuando sabemos, según la investigación de FORGE (2018), que la competencia que más se trabaja en las aulas en el nivel primario es “Resuelve problemas de cantidad”.
7. Las tareas propuestas a los estudiantes en los textos de matemática del V ciclo dotados por el MINEDU no reúnen todas las características planteadas por Wiggins para ser una tarea auténtica y, en su mayoría (73,5%), son de baja demanda cognitiva para que permita el desarrollo de la competencia planteado en el Programa Curricular del nivel primario.
8. En los textos de matemática del V ciclo dotados por el MINEDU, no existen tareas para hacer estocástica; es decir, tareas “abiertas” que lleven al estudiante a crear, emitir juicios de valor, monitorear y autorregular sus procesos cognitivos, promover su pensamiento crítico, entre otros. Por ello, podemos decir que las técnicas no son flexibles y la organización matemática no es completa ni articulada.
9. Las técnicas en los textos de matemática del V ciclo dotados por el MINEDU están dadas mayormente a comparar probabilidades, lo cual no es coherente con el

estándar del V ciclo, sino más bien con el estándar de IV ciclo. Estas técnicas se relacionan con la capacidad de: “Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos”, y se centra en lo numérico lo cual no nos permite hacer modificaciones en las tareas para hacer trabajos diferentes a los entregados, o producir técnicas nuevas que permitan ampliar este tipo de tarea.

10. El trabajo de las ideas estocásticas en los textos de matemática del V ciclo dotados por el MINEDU es mínimo (25%) y son trabajados con dificultad, pues no se plantea la división de la realidad de manera reflexiva en los textos de matemática del V ciclo dotados por el MINEDU a partir de observar la situación en un contexto determinado para saber si hay incertidumbre o no. Asimismo, tampoco se hace visible la caracterización de una situación aleatoria: el contexto, las restricciones, las condiciones, el espacio muestral, el suceso simple y compuesto, para asociarlo en adelante a una probabilidad y hacer una interpretación de la misma de los sucesos en la realidad que le dio origen como lo plantea Osorio (2012). Asimismo, no se ejemplifican más allá de los juegos de azar las situaciones aleatorias o de incertidumbre reproducibles y no reproducibles, sabiendo que la mayoría de las situaciones que se dan en la vida cotidiana son de incertidumbre; por lo que asociar prematuramente a una probabilidad a los hechos y sucesos no permitirá una interpretación de la misma en la realidad que le dio origen.
11. Las tareas en los textos de matemática del V ciclo dotados por el MINEDU se describen solo en contextos personales que afectan de manera inmediata al estudiante, pues están relacionadas con sus actividades diarias o cotidianas, y no hay tareas en situaciones: educativas o de contexto escolar, público o propio de la comunidad donde el estudiante está inmerso tal como lo manifiesta también Rico y Segovia (2016).

12. Existen tareas pocas claras y confusas en los textos de matemática del V ciclo dotados por el MINEDU y, en algunos casos, no hay tareas sino afirmaciones.
13. Existen técnicas aisladas para las tareas en los textos de matemática del V ciclo dotados por el MINEDU; es decir, las técnicas no se relacionan con las tecnologías y tareas que impliquen justificar, interpretar, comparar técnicas, ver las más fiables o pertinentes para realizar las tareas, concluir, tomar decisiones y otras; en consecuencia, no garantizan el trabajo de la competencia y no están suficientemente abordadas, por ello la organización matemática es incompleta en los textos.
14. Hay tecnologías que no se presentan adecuadamente o son poco precisas o simplemente hay ausencias de las mismas para las tareas propuestas en los textos de matemática del V ciclo dotados por el MINEDU; por tanto, no ayudan a interpretar y justificar las técnicas; y las teorías están ausentes.
15. Existen tareas para la evaluación de los aprendizajes en la sección de los textos denominado, *Evalúo mis aprendizajes*, pero en su mayoría (3 de 4 tareas) son de baja demanda cognitiva y no corresponden ni al ciclo ni al grado; por ejemplo, las tres tareas de sexto grado evalúan la comparación de probabilidades (más probable y menos probable).
16. La praxeología matemática y didáctica del sentido estocástico en los textos de matemática del V ciclo son incompletos respecto a las tareas y técnicas, y se acepta el tercer supuesto hipotético.
17. Las transformaciones matemáticas que ha sufrido el saber sabio, saber a enseñar y saber escolar del sentido estocástico en el V ciclo evidencian vacíos, rupturas e incoherencias entre los recursos y herramientas que implementan el Currículo Nacional. Se acepta el cuarto supuesto hipotético, pues no hay un alineamiento entre el Programa Curricular del nivel primario (2016), las orientaciones

metodológicas de las rutas del aprendizaje (2015) y el texto escolar (2012) por cuanto han sido publicados en diferentes momentos; por ello, no hay una transposición didáctica del saber del sentido estocástico, y una organización matemática y didáctica completa y coherente.

### Recomendaciones y propuestas

- Recomendamos al Ministerio de Educación ajustar la claridad, coherencia y progresión del estándar del V ciclo con respecto al IV ciclo y VI ciclo referido a la estocástica, y proponemos:

**Tabla 23.**

*Propuesta de estándares referido a la estocástica*

Niveles	Propuesta de ajuste en lo relacionado a la incertidumbre
D	Representa problemas situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de suceso público o científico, con su probabilidad de causas. Interpreta la información probabilística provenientes de diversas fuentes. Caracteriza las partes del espacio muestral. Emplea técnicas de muestreo estratificado. Calcula la probabilidad total y emplea el teorema de Bayes. Contrasta los efectos observados y sustenta conclusiones sobre los resultados al aplicar la probabilidad de las causas, y toma decisiones pertinentes al contexto.
7	Representa problemas situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de suceso público o científico con sucesos dependientes, independientes, simples o compuestos de una situación aleatoria y con su probabilidad frecuentista y condicional. Interpreta la información probabilística provenientes de diversas fuentes. Emplea la técnica del muestreo simple para determinar una muestra representativa. Calcula la probabilidad de un suceso, utilizando la frecuencia relativa. Emplea la regla de multiplicación para encontrar la probabilidad de sucesos dependientes e independientes. Emplea la permutación y combinación. Hace predicciones con base en la probabilidad de ocurrencia de un suceso y las sustenta. Toma decisiones pertinentes al contexto.
6	Representa problemas situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos públicos con la probabilidad de Laplace y frecuentista. Interpreta el espacio muestral y la probabilidad de un suceso asociándolos a los valores desde 0 hasta 1. Usa la simulación, el diagrama de árbol, tablas, diagramas de Venn y otros para calcular la probabilidad Laplaciano y frecuentista de un suceso y hacer combinaciones. Halla la probabilidad de sucesos exhaustivos y emplea la regla de adición. Compara probabilidades de distintos sucesos sin calcularlas. Predice la ocurrencia de sucesos y toma decisiones con base en la probabilidad de un suceso. Justifica la pertinencia de sus decisiones.

- 
- Conjetura acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo
- 5 Representa problemas, situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos educativos, ocupacionales o laborales con la probabilidad clásica y frecuencia relativa con ensayos hasta 300. Encuentra todos los resultados posibles o espacio muestral y los resultados favorables. Usa la simulación, el diagrama de árbol, tablas, diagramas de Venn y otros para hallar la probabilidad de un suceso, operar nocionalmente con sucesos y combinar. Compara la probabilidad de sucesos (por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa usando fracciones). Expresa las restricciones y condiciones de una situación o experimento aleatorio, la noción de variable aleatoria (con juegos y experimentos), la noción de cuando un suceso es dependiente, independiente o exhaustivo y la determinación de una muestra al azar. Interpreta la probabilidad de un suceso relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Asimismo, interpreta los conceptos de sucesos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.
- Verifica la equiprobabilidad o no del espacio muestral y su simetría. Formula predicciones, conclusiones y toma decisiones con base en la probabilidad de un suceso.
- 4 Representa problemas situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos cotidianos o personales con nociones de sucesos compuestos, sucesos mutuamente excluyentes o no excluyentes. Expresa las restricciones de una situación aleatoria y las nociones de cuando un suceso es compuesto, mutuamente excluyente y no excluyente. Registra la ocurrencia de sucesos y visibiliza la ocurrencia de sucesos compuestos en el diagrama del árbol. Compara las posibilidades de ocurrencia de sucesos. Así mismo, a partir de la información, justifica afirmaciones, elabora conclusiones y toma decisiones.
- 3 Representa problemas, situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos cotidianos o personales con situaciones deterministas o aleatorias, con sucesos simples, seguro, imposible o posible. Registra la ocurrencia de sucesos simples. Compara lo favorable y desfavorable. Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos con "seguro", "imposible" o "posible". Asimismo, elabora sus conclusiones y explica sus decisiones basándose en la información producida.
- 2 No aplica
- 1 No aplica
-

- Recomendamos al Ministerio de Educación ajustar la claridad, coherencia y progresión de los desempeños con respecto a las capacidades de la competencia referido a la estocástica y al estándar propuesto en la tabla 21.
- Recomendamos a Ministerio de Educación incorporar el trabajo de manera intuitiva de las siguientes ideas estocásticas en el V ciclo: Experimento aleatorio o situación aleatoria y restricciones y condiciones de una situación aleatoria; la probabilidad clásica; la noción de la probabilidad frecuentista; el espacio muestral; la equiprobabilidad y simetría, y la no equiprobabilidad del espacio muestral; las nociones de suceso compuesto, unión, intersección, exhaustivo, suceso complemento, sucesos con reemplazo (suceso independiente), suceso sin reemplazo (suceso dependiente); la comparación de probabilidades; las nociones de combinatoria con el uso del diagrama del árbol; las nociones de variable aleatoria (ej. Obtener como suma 7 al lanzar dos dados). Por ello, proponemos los siguientes contenidos para quinto y sexto grado en la siguiente tabla:

**Tabla 24.**

*Propuesta de contenidos para quinto y sexto grado referido a la estocástica*

<b>Contenidos propuestos para el 5. ° grado respecto a la estocástica.</b>	<b>Contenidos propuestos para el 6. ° grado respecto a la estocástica.</b>
<b>EL CONTEXTO</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Educativos, ocupacionales o laborales.</li> </ul>	
<b>LAS ACCIONES</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representa problemas, situaciones y experimentos.</li> <li>- Expresa las restricciones y condiciones.</li> <li>- Interpreta nociones, conceptos y procedimientos.</li> <li>- Selecciona procedimientos y recursos como el recuento, diagrama de árbol, tablas, diagrama de Venn y otros.</li> <li>- Predice y formula sus predicciones.</li> <li>- Verifica predicciones, conceptos y procedimientos.</li> <li>- Realiza conclusiones y toma decisiones.</li> </ul>	

---

 CONTENIDOS CONCEPTUALES

- Situación o experimento aleatorio: restricciones y condiciones
- Sucesos simples.
- Noción de sucesos compuestos con diagrama de árbol.
- Comparación de probabilidades: por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa usando fracciones. Sucesos igualmente probables.
- Espacio muestral.
- Equiprobabilidad del espacio muestral.
- No equiprobabilidad del espacio muestral.
- Cálculo de la probabilidad del suceso compuesto a partir de sus sucesos simples usando el diagrama de árbol.
- Condiciones para la regla del producto: nociones de, sucesos mutuamente excluyentes, sucesos dependientes, sucesos independientes.
- Noción de suceso dependiente.
- Noción de suceso independiente.
- Diagrama del árbol para combinar.
- Encontrar el número de puntos a conseguir en juegos y experimentos (dados, monedas, otros). (variable aleatoria discreta).
- Probabilidad mediante frecuencia relativa: Ensayos hasta 100.
- Determina una muestra al azar.
- Sustituye convenientemente el experimento de la realidad por otro experimento al azar.
- Ejemplo: el sexo de un recién nacido por una urna con dos bolas, fichas o tarjetas para representar ambos sexos.

## CONTENIDOS CONCEPTUALES

- Probabilidad clásica.
  - Comparación de probabilidades: por correspondencia, proporcionalidad y multiplicativa usando fracciones. Sucesos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.
  - Nociones de operaciones con sucesos
  - Suceso exhaustivo.
  - Espacio muestral.
  - Equiprobabilidad del espacio muestral (igualdad de probabilidad).
  - No equiprobabilidad del espacio muestral
  - Ninguno de los resultados posibles tiene mayor ventaja que el resto (simetría).
  - Cálculo de la probabilidad del suceso compuesto a partir de sus sucesos simples usando el diagrama de árbol.
  - Noción de sucesos mutuamente excluyentes.
  - Condiciones para la regla del producto: nociones de, sucesos mutuamente excluyentes, sucesos dependientes, sucesos independientes.
  - Noción de suceso dependiente.
  - Noción de suceso independiente.
  - Diagrama del árbol para combinar.
  - Encontrar el número de puntos a conseguir en juegos y experimentos (dados, monedas, otros). (variable aleatoria discreta).
  - Estimar el tiempo de espera del bus, la temperatura ambiente, otros (variable aleatoria continua).
  - Probabilidad mediante frecuencia relativa: ensayos hasta 300.
  - Determina una muestra al azar.
  - Sustituye convenientemente el experimento de la realidad por otro experimento al azar.
  - Ejemplo: La cantidad de boletos que poseen dos familias para una rifa por dos urnas con bolas que representes los boletos.
- 

- Recomendamos al Ministerio de Educación el siguiente ajuste para el estándar del V ciclo referido a la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” y, con base, en ello ajustar los desempeños, por ello proponemos (en negrita lo referido a estocástica):

Representa problemas, situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos educativos, ocupacionales o laborales con la probabilidad clásica y frecuencia relativa con ensayos hasta 300. Asimismo, relaciona interrogantes sobre características de un grupo con datos de variables cualitativas o cuantitativas discretas, gráficos de barras dobles o gráficos de líneas. Expresa las restricciones y condiciones de una situación o experimento aleatorio, la noción de variable aleatoria (con juegos y experimentos), la noción de cuando un suceso es dependiente, independiente o exhaustivo y la determinación de una muestra al azar. Interpreta la probabilidad de un suceso relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Asimismo, interpreta los conceptos de sucesos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples. Formula cuestionarios para recoger datos, interpreta datos en tablas o gráficos, expresa la noción de media como una medida que es resultado de un reparto equitativo. Encuentra todos los resultados posibles o espacio muestral y los resultados favorables. Halla la probabilidad de un suceso y opera con sucesos. Usa la simulación, el diagrama de árbol, tablas, diagramas de Venn y otros para hallar la probabilidad de un suceso, operar nocionalmente con sucesos y combinar. Compara la probabilidad de sucesos (por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa usando fracciones). Calcula la frecuencia acumulada, la media, la mediana y la moda; construye tablas y gráficos. Verifica la equiprobabilidad o no del espacio muestral. Formula predicciones, conclusiones y toma decisiones con base en la probabilidad de un suceso y a la información estadística.

- Recomendamos al Ministerio de Educación tener en cuenta las ideas estocásticas fundamentales para ajustar el estándar del ciclo y sus desempeños, vinculándolos de manera intuitiva para su tratamiento en la enseñanza. Por ello, recomendamos la siguiente propuesta para los desempeños de quinto y sexto grado en la siguiente tabla:

**Tabla 25.**

*Propuesta de ejemplos de desempeños para quinto y sexto grado referido a la estocástica.*

<b>Propuesta de ajuste de desempeños del quinto grado (en negrita lo referido a la estocástica)</b>	<b>Propuesta de ajuste de desempeños del sexto grado (en negrita lo referido a la estocástica)</b>
<p>Representa problemas, situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos educativos, ocupacionales o laborales con la probabilidad clásica y de frecuencia relativa con ensayos de 100 y con su espacio muestral. Asimismo, relaciona las características de una población en estudio con variables cualitativas y cuantitativas discretas y las organiza en tablas de frecuencia simple, pictogramas y gráficos de barra en situaciones de interés o un tema de estudio.</p> <p>Expresa las restricciones y condiciones de una situación o experimento aleatorio.</p> <p>Describe el significado de la media aritmética como reparto y de la moda como el valor de mayor frecuencia.</p> <p>Lee gráficos de barras con escala, tablas de doble entrada y pictogramas de frecuencias con equivalencias, para interpretar la información del mismo conjunto de datos contenidos en diferentes formas de representación y de la situación estudiada.</p> <p>Formula preguntas para cuestionarios según un tema de interés.</p>	<p>Representa problemas, situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos educativos, ocupacionales o laborales con la probabilidad clásica y de frecuencia relativa con ensayos hasta 300 y con su espacio muestral. Relaciona las características de una población en estudio sobre situaciones de interés o aleatorias con variables cualitativas y cuantitativas discretas. También, relaciona el comportamiento del conjunto de datos con datos organizados en tablas de frecuencia simple y acumulada, gráficos de barras dobles, gráficos de líneas, la moda y la media aritmética como reparto equitativo.</p> <p>Expresa las restricciones y condiciones de una situación o experimento aleatorio y la noción de cuando un suceso es dependiente, independiente y exhaustivo, y la noción de variable aleatoria con juegos y experimentos, y la determinación de una muestra al azar. Interpreta la probabilidad de un suceso relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Asimismo, interpreta los conceptos de sucesos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.</p> <p>Describe el significado la media aritmética como reparto y como punto de equilibrio.</p> <p>Lee tablas de doble entradas y gráficas de barras dobles, así como información proveniente de diversas fuentes (periódicos, revistas, entrevistas, experimentos, etc.), para interpretar la información que contienen considerando los datos, las condiciones de la situación y otra información que se tenga sobre las variables. También, advierte que hay tablas de doble entrada con datos incompletos, las completa y produce nueva información.</p>

---

	Formula preguntas para cuestionarios según un tema de interés.
Selecciona procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, en tablas de frecuencia simple, pictogramas verticales y horizontales (cada símbolo representa más de una unidad), gráficos de barras con escala dada (múltiplos de 10), la moda como la mayor frecuencia.	Selecciona procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, en tablas de frecuencia simple, pictogramas verticales y horizontales (cada símbolo representa más de una unidad), gráficos de barras con escala dada (múltiplos de 10), la moda como la mayor frecuencia.
Selecciona recursos y procedimientos como la simulación, el diagrama de árbol, tablas, diagramas de Venn y otros para hallar el espacio muestral, la probabilidad de un suceso y combinar. Compara la probabilidad de sucesos (por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa o usando fracciones)	Selecciona recursos y procedimientos como la simulación, el diagrama de árbol, tablas, diagramas de Venn y otros para hallar el espacio muestral, la probabilidad de un suceso, los resultados favorables y combinar. Opera noacionalmente con sucesos encuentra el suceso unión, suceso intersección, suceso complemento y sucesos exhaustivos. Compara la probabilidad de sucesos (por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa.
Verifica la equiprobabilidad o no del espacio muestral. Formula predicciones, conclusiones y toma decisiones con base en la posibilidad de mayor ocurrencia de un suceso con respecto a otro.	Verifica la equiprobabilidad o no del espacio muestral. Formula predicciones, conclusiones y toma decisiones con base en la probabilidad de un suceso. Pronostica la tendencia de los datos en gráficas o la ocurrencia de sucesos a partir del análisis de los resultados de una situación aleatoria.
Explica las conclusiones y decisiones que toma a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.	Pronostica si la probabilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro. Justifica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.

---

- Recomendamos al Ministerio de Educación, empresas e instituciones dedicadas a la educación, abordar en los textos y herramientas pedagógicas las ideas estocásticas fundamentales; por ello, proponemos que en el quinto y sexto grado se deben trabajar intuitivamente lo siguiente:

**Tabla 26.***Propuesta de ideas estocásticas a abordar en los textos de quinto y sexto grado*

<b>Ideas estocásticas fundamentales</b>	<b>Ideas estocásticas a abordar en el texto de quinto grado.</b>	<b>Ideas estocásticas a abordar en el texto de sexto grado.</b>
La probabilidad como normalización de nuestras creencias.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Situación o experimento aleatorio: restricciones y condiciones</li> <li>- Sucesos simples.</li> <li>- Noción de sucesos compuestos con diagrama de árbol.</li> <li>- Comparación de probabilidades: por correspondencia, proporcionalidad o multiplicativa usando fracciones. Sucesos igualmente probables.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad clásica.</li> <li>- Comparación de probabilidades: por correspondencia, proporcionalidad y multiplicativa usando fracciones. Sucesos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.</li> <li>- Nociones de operaciones con sucesos</li> <li>- Suceso exhaustivo.</li> </ul>
El conjunto de todas las posibilidades. Equidistribución y simetría.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Espacio muestral.</li> <li>- Equiprobabilidad del espacio muestral.</li> <li>- No equiprobabilidad del espacio muestral.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Espacio muestral.</li> <li>- Equiprobabilidad del espacio muestral (igualdad de probabilidad).</li> <li>- No equiprobabilidad del espacio muestral</li> <li>- Ninguno de los resultados posibles tiene mayor ventaja que el resto (simetría).</li> </ul>
Regla de adición de probabilidades.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Cálculo de la probabilidad del suceso compuesto a partir de sus sucesos simples usando el diagrama de árbol.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Cálculo de la probabilidad del suceso compuesto a partir de sus sucesos simples usando el diagrama de árbol.</li> <li>- Noción de sucesos mutuamente excluyentes.</li> </ul>
Independencia y regla del producto.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Condiciones para la regla del producto: nociones de sucesos mutuamente excluyentes, sucesos dependientes, sucesos independientes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Condiciones para la regla del producto: nociones de sucesos mutuamente excluyentes, sucesos dependientes, sucesos independientes.</li> </ul>
Probabilidad Condicional.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Noción de suceso dependiente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Noción de suceso dependiente.</li> </ul>
Independencia.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Noción de suceso independiente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Noción de suceso independiente.</li> </ul>
Combinatoria.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Diagrama del árbol para combinar.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Diagrama del árbol para combinar.</li> </ul>
La variable aleatoria.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Encontrar el número de puntos a conseguir en juegos y experimentos (dados, monedas, otros). (variable aleatoria discreta).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Encontrar el número de puntos a conseguir en juegos y experimentos (dados, monedas, otros). (variable aleatoria discreta).</li> <li>- Estimar el tiempo de espera del bus, la temperatura ambiente, otros (variable aleatoria continua).</li> </ul>
Las leyes de los grandes números.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad mediante frecuencia relativa: Ensayos hasta 100.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Probabilidad mediante frecuencia relativa: ensayos hasta 300.</li> </ul>
Muestreo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Determina una muestra al azar.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Determina una muestra al azar.</li> </ul>
Simulación.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sustituye convenientemente el experimento de la realidad por otro experimento al azar. Ejemplo: el sexo de un recién nacido por una urna con dos bolas, fichas o tarjetas para representar ambos sexos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sustituye convenientemente el experimento de la realidad por otro experimento al azar. Ejemplo: La cantidad de boletos que poseen dos familias para una rifa por dos urnas con bolas que representes los boletos.</li> </ul>

- Recomendamos, a las instituciones dedicadas a la educación, plantear tareas estocásticas auténticas, “abiertas” y de alta demanda cognitiva para que según el propósito de aprendizaje del estudiante puedan fomentar la adquisición de diferentes competencias en el aula; y en los exámenes o test de diagnóstico, se puedan hacer evidentes las competencias que existen o que aún falta desarrollar tal como lo señalaron Werner Blum et .al. (2016); por ello, proponemos a modo de ejemplos algunas tareas:

Ejemplo 1: para trabajar la probabilidad como normalización de nuestras creencias. Para esto, representa problemas, situaciones y experimentos relacionados a la ocurrencia de sucesos educativos, ocupacionales o laborales con la probabilidad, “usando la escalera de la probabilidad”.

Elaboren con su equipo una lista de sucesos que podrían ocurrir o no, semana a semana a lo largo de un mes. Luego, asígnenle un valor de probabilidad a cada uno de estos sucesos, representándolos en la “escalera de la probabilidad” con base a su grado de creencia.

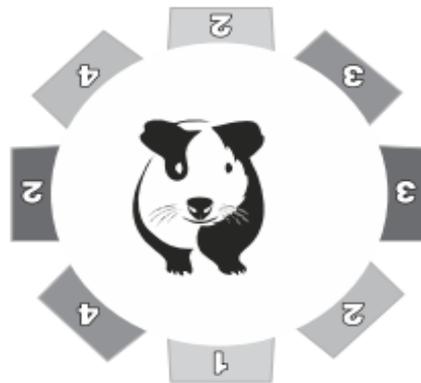
Terminada la semana, revisa con tu equipo la “escalera de la probabilidad” que elaboraron y escriban las posibles informaciones que han influido en los cambios de asignación de probabilidades y comuníquenlo a su maestra o maestro.

Adaptado de Batanero, 2015, p.14.

Ejemplo 2: (verificar la equiprobabilidad y simetría del espacio muestral).

En una tómbola dominical, se está jugando el juego del cuy. Este juego consiste en adivinar en qué número de caja entrará el cuy luego de soltarlo.

Caroline ha apostado que el cuy se meterá a la caja número 1, ¿será justo este juego para Caroline? ¿Por qué? ¿Qué le aconsejarías a Caroline?



Solución:

Contexto: Público

Situación de incertidumbre: Verificar el número de caja donde se meterá el cuy

Desde el contexto:

- ☒ Restricción: El cuy se meterá solo en una caja en una vez.
- ☒ Condición: Gana la apuesta si el cuy ingresa al número de caja que se anunció.

$$EM = \{1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4\}$$

EM es finito, pero no es equiprobable; por tanto, no se puede aplicar la regla de Laplace.

El juego no es justo para Caroline, porque todos los sucesos simples que conforman el espacio muestral no tienen la misma probabilidad de salir. Le aconsejo que apueste al número 2.

Ejemplo 3: (Expresar la noción de suceso dependiente e independiente y tomar decisiones)

Arma tu grupo de cinco estudiantes y elige al azar a un coordinador y un secretario.

Para esto, usa la simulación colocando sus nombres de cada uno en papelitos, dóblenlos e introdúzcanlo en una bolsa o caja oscura y saca los papelitos sin mirar según las indicaciones.

Caso 1:

1. Saca el primer papelito; el nombre que resulte será el coordinador; anota el nombre.
2. Enseguida saca sin mirar un segundo papelito, de los que quedan, para saber quién será el secretario y luego anota el nombre.

Caso 2:

3. Saca el primer papelito, el nombre que resulte será el coordinador, anota el nombre.
4. Ahora el papelito con el nombre del coordinador se introducirá nuevamente en la bolsa.
5. Saca sin mirar el segundo papelito, para saber quién será el secretario; anota el nombre.

Contesta con tu grupo:

- En qué caso un estudiante puede tener dos cargos ¿Por qué?
- En qué caso un estudiante solo puede tener un cargo ¿Por qué?
- Decidan por uno de los casos y comuniquen a sus compañeros el porqué de la decisión tomada.

Ejemplo 4: (Expresar la noción de probabilidad condicional)

Trabaja por parejas: Simula que uno es el médico y el otro el enfermo.

Caso 1

El enfermo llega a tu consultorio y te dice que siente enfermo; lo observas; le tomas la temperatura, presión y talla; y le das el tratamiento.

Caso 2

El enfermo llega a tu consultorio y te dice que siente enfermo; le pides que te cuente por qué se siente enfermo y miras su historial; y luego le das el tratamiento.

Contesta:

- En qué caso crees que ha recibido una buena atención ¿por qué?
  - Si le tuvieras que explicar sobre la “buena atención” a un familiar del enfermo, ¿Qué le dirías?
- Recomendamos al Ministerio de Educación y empresas, como editoriales y otros, alinear las tareas, técnicas, tecnologías y teorías en los materiales y herramientas educativas dotados por el MINEDU y las que se pretenda elaborar o diseñar.
- Recomendamos al Ministerio de Educación hacer un alineamiento del Programa Curricular del nivel primario, las orientaciones metodológicas de las Rutas de Aprendizaje y los textos escolares para hacer efectiva la implementación del Currículo Nacional de Educación Básica en el nivel primario.
- Recomendamos a los investigadores ampliar la investigación a la actividad del docente.

## Referencias

- Abrate, R., Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias*. Provincia de Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Villa María. Recuperado el 21 de mayo de 2015, de <http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf>
- Bachelard, G. (1948). *La formación del Espíritu Científico*. Editorial: Siglo XXI. México D.F.
- Becerra, A. (2015). *Análisis de una organización matemática asociada al objeto cuadriláteros que presenta un libro de texto del quinto grado de educación primaria*. Tesis para optar el grado de Magister. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- Bressan, A. y Bressan, O. (2008). *Probabilidad y estadística: cómo trabajar con niños y jóvenes*. Ediciones Novedades educativas. Buenos Aires.
- Barrantes, H. (2006). *Los obstáculos epistemológicos*. <http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos.pdf>
- Bosch, M. & Gascón, J. (2004). *La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos*. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm>
- Bosch, M. & Gascón, J. (2009). *Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria*. En M.J. González, M.T.
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos en Didáctica de las matemáticas*. Traducción Julia Centeno. Documento bajado de Internet. Educación Matemática y Didáctica de las Matemáticas. En: Revista Educación Matemática, Vol.12, No. 1, Abril de 2000.
- Brousseau, G. (1999). *Educación y Didáctica de las matemáticas 1*. Educación Matemática, 12 (1), 5-38.

- Batanero, C. (2015). *Artículo, ideas estocásticas fundamentales ¿Qué Contenidos se Debe Enseñar en la Clase de Probabilidad?* Universidad de Granada recuperado en:  
file:///C:/Users/Marisol/Desktop/escritorio%20MARITA/ARCHIVOS%20ABRIL%202015/Downloads/Ideasfundamentales.pdf
- Cárcamo, D. (2012). *Uso de los libros de texto de matemática en el proceso de enseñanza: un análisis de casos comparado*. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional “Francisco Morazán”. Honduras.
- Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: AIQUE.
- Chevallard, Y. (1997). *Estudiar Matemáticas: El eslabón Perdido entre la enseñanza aprendizaje*. Editorial: Horsori. Barcelona.
- Chirinos, D. (2004). *Análisis de la actividad del profesor dentro de un proceso didáctico: el caso de los irracionales en la enseñanza secundaria peruana*. Tesis para optar el grado de Magister. Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
- Chirinos, D. (2013). *Análisis de la actividad del profesor dentro de un proceso didáctico: el caso de los números reales*. (Tesis de Doctorado en Ciencias de la Educación). Universidad Nacional de Educación. Lima, Perú. Recuperado de: URI: <http://repositorio.une.edu.pe/bitstream/handle/UNE/.../TD%20CE%20C557%202013.pdf?>
- Carillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior*. Tesis para optar el grado de Magister. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- D'Amore B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Prefacios de Colette Laborde.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

- Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. España. Recuperado de: [http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS\\_en\\_PDF.pdf](http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS_en_PDF.pdf)
- García, A. et al. (2015). *Herramientas para mejorar las prácticas de evaluación formativa en la asignatura de Español*. Materiales para Apoyar la Práctica Educativa. México: INEE.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
- González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática 13*, 89-113. Recuperado el 20 de mayo de 2015, de [http://funes.uniandes.edu.co/1636/1/291\\_Bosch2009Aportaciones\\_SEIEM13.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1636/1/291_Bosch2009Aportaciones_SEIEM13.pdf)
- Gonzales, C. (2012). *Una praxeología matemática de proporción, en un texto universitario*. (Tesis de Maestría en Educación matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.
- Gurrero, G. (2018). *Estudio de la implementación del currículo nacional de la educación básica en instituciones educativas públicas focalizadas*. FORGE, GRADE. Lima.
- Grisales, L. & González, E. (2009). *El saber sabio y el saber enseñado: un problema para la didáctica universitaria*. Educación y Educadores, 12(2), 77-86. Recuperado el 12 de marzo de 2015, de [http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0123-12942009000200006&lng=en&tlng=es](http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0123-12942009000200006&lng=en&tlng=es).
- Heitele, D (1975). *An epistemological view on fundamental stochastic ideas*. Educational Studies in Mathematics, 6,187-205

- Hernández, R; Fernández, C; Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. Ediciones McGraw – Hill. Quinta edición Interamericana, México
- Ministerio de Educación (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima.
- Ministerio de Educación (2016). *Programa curricular de Educación Primaria*. Lima.
- Ministerio de Educación (2015) *Rutas del Aprendizaje*. Ciclo V, 5to. y 6to. Grado de Educación Primaria.
- Moya C. Rufino y Saravia A. Gregorio. (1988). *Probabilidad e Inferencia estadística*. Editorial san Marcos, segunda edición. Lima.
- Muñoz, J., & Murcia, J. (2015). *Las matemáticas en busca del sentido*. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 70,6-8
- Osorio, A. (2012). *Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la Enseñanza Superior*. (Tesis de Maestría en Educación matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú. Recuperado de: URI:  
<http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4658>
- Rico, L. y otros. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Ediciones Pirámide. Madrid.
- Rico, Lupiañez y Molina. (2013). *Análisis Didáctico en educación Matemática*. *Metodología de Investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Editorial Comares, S.L. Granada.
- Robert, P. (1998). *Estadística en las ciencias del comportamiento*. Internacional Thomson Editores S.A. Quinta edición. México.
- Sadovsky, P. (2005). *La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires. Recuperado el 16 de mayo de 2015, de [http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/teoria\\_situaciones.pdf](http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/teoria_situaciones.pdf)

- Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Gráficas S.L. Granada.
- Stein y colaboradores Apéndice 1. Guía para el análisis de ejercicios de Stein y colaboradores. Recuperado de [www.grade.org.pe/download/pubs/dt43-oportunidades-2.pdf](http://www.grade.org.pe/download/pubs/dt43-oportunidades-2.pdf)
- Werner, B., Drüke, C., Hartung, R. y Köller, O. (2006). *Estándares de Aprendizaje de la Matemática, articulación primaria-secundaria: orientaciones para las sesiones de aprendizaje, ideas para la capacitación docente, ejemplos de tareas*. Berlín.  
Traducida al español por Talía Guevara Torres Llosa. (2016). Lance Gráfico S.A.C. Lima.
- Vásquez, E. (2012). *Medición del impacto del libro de texto en el aula de clases*. Tesis doctoral. University of flensburg. Alemania
- Vergnaud, G. (1990) *La teoría de los campos conceptuales, en Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, nº 2, 3, pp. 133-170.
- Vidal, R. (s.f.). *La Didáctica de las Matemáticas y la Teoría de Situaciones*. Recuperado el 16 de mayo de 2015, de <http://biblioteca.uahurtado.cl/ujah/reduc/pdf/pdf/mfn303.pdf>