UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN

Enrique Guzmán y Valle

"Alma Máter de Magisterio Nacional"

FACULTAD DE CIENCIAS

Escuela Profesional de Matemática e Informática

MONOGRAFÍA

CONJUNTOS

Enfoque axiomático de la teoría de conjuntos.La paradoja de Russell Inclusión. Operaciones con conjuntos.Familia de conjuntos y operaciones básicas generalizadas. Partición y Cubrimiento. Epistemología y didáctica de la teoría de conjuntos. Resolución de problemas basados en conjuntos.

Examen de Suficiencia Profesional Resolución Nº 0513-2019-D-FAC

Presentado por :

Jeyson Aguilar Polanco

Para optar por el título profesional de licenciado en educación

Especialidad: Matemática

Lima –Perú

2019

MONOGRAFÍA

CONJUNTOS

Enfoque axiomático de la teoría de conjuntos. La paradoja de Russell Inclusión. Operaciones con conjuntos.Familia de conjuntos y operaciones básicas generalizadas. Partición y Cubrimiento. Epistemología y didáctica de la teoría de conjuntos. Resolución de problemas basados en conjuntos.

Designación de Jurado Resolución Nº 0513-2019-D-FAC

....

Dr.Narciso Férnandez Saucedo

PRESIDENTE

....

Mg.Luis Esteban Rojas Guevara

SECRETARIO

....

Lic.Vicente Carlos Dávila Huamán

VOCAL

Línea de investigación: Currículum y Formación Profesional en Educación

Dedicatoria

Con mucho cariño dedico este trabajo a mi esposa Cleofé, mi hija Ariana y madre que estuvieron siempre apoyándome ,animando en todo tiempo.

Tabla de Contenido

Índice de Figuras

Introducción

Se observa que desde los tiempos antiguos ha existido seres humanos, objetos y grupos de bandas que vivían en una comunidad, que para su subsistencia tenían que permanecer juntos ya sea para poder cazar o defenderse.

Todo esto nos lleva a pensar que la representación numérica de una cantidad siempre estuvo presente, luego los griegos harán un gran aporte a las matemáticas.

Podemos decir que la idea de representar un conjunto , siempre estuvo presente desde hace muchos años atrás ,mediante esta idea quiero mostrar un enfoque axiomático de la teoría de conjuntos, bajo una perspectiva de concepto primitivos.

Quiero que un momento podamos observar las cosas como un conjunto ,y observamos que hay Conjuntos de diferentes tipos ,relacionados con nuestra realidad que vivimos.

Entonces podemos observar a simple inspección existen varios tipos de conjuntos, diriamos Una gama de conjuntos ,que sin querer somos parte de aquellos conjuntos.

Es decir toda nuestra realidad se rige entorno a la formación de conjuntos.

Muchos matemáticos modernos han tratado de que intentando encontrar un inicio de las matemáticas, algunos llegaron a pensar que lo harían a través de la teoría de conjunto**.**

Todos los esfuerzos fueron en vano al inicio a medida que se fue abordando e investigando el tema se llegó a que la mejor manera de dar a conocer los teoremas a apoyándose en los axiomas.

Bajo esta introducción deseamos tocar los axiomas que definen un conjunto.

Que nos que dan por observa r y demostrar cómo se comportan para poder formar nuevos conjuntos a partir de otros conjuntos.

Esto me lleva a pensar que los axiomas juegan un papel importante para formación de conjuntos.

CAPÍTULO I

Axioma Breve de la Teoría de Conjuntos

1.1 El método axiomático (breve exposición)

El uso del método axiomático se ha extendido no sólo a las diferentes ramas de la matemática, sino hacia otras ciencias como la física, economía, etc. Se hará una breve exposición de los aspectos esenciales de este método.

Generalmente, toda teoría matemática está formada por dos conjuntos:

Un conjunto de conceptos, y un conjunto de proposiciones.

***i*) Conceptos.**

Los conceptos son instrumentos utilizados para distinguir entidades y agruparlas. Permiten realizar operaciones conceptuales y empíricas de análisis y síntesis. Por ejemplo:

Leibniz fue un matemático es una proposición que está en el "nivel" conceptual. En ese nivel:

- "Leibniz" es un concepto y puede expresarse por C.
- "fue un" se entiende como perteneciente a una clase, que también es un concepto; y se expresa por $\in$.

Los conceptos son de dos tipos: términos primitivos (o no definidos) y términos definidos.

Términos Primitivos

Los términos primitivos son los primeros que se dan en la teoría sin definición. Pueden ser de diferente naturaleza: elementos, conjuntos, relaciones, operaciones, etc. Cuya naturaleza no queda especificada de antemano. A los términos primitivos por ser no definidos, se los representa por variables.

Ejemplo. Tomaremos como términos primitivos para la teoría de conjuntos a los tres siguientes: elemento, conjunto y una relación "$\in$" que llamaremos relación de pertenencia. Entonces tenemos:

- Elementos: *a*, *b*, *c*, … , *x*, *y*, *z*.
- Conjuntos: *A*, *B*, *C*, … , *X*, *Y*, Z.

Términos definidos.

A partir de los términos primitivos, otros conceptos pueden ser introducidos en una teoría axiomática: los definidos (o derivados) a partir de los primitivos.

Por ejemplo, a partir de los conceptos de "punto", "recta", "plano" y de las relaciones de "congruencia", "incidencia" y "estar entre" (conceptos primitivos en el tratamiento dado por Hilbert en 1899) se pueden definir: ángulo, rectas perpendiculares, planos paralelos, etc.

***ii*) Proposiciones.**

Las proposiciones son de dos tipos:

- Axiomas o Postulados
- Teoremas

Axiomas

Además, de los conceptos primitivos, el método axiomático exige que se selecciones determinadas proposiciones que vienen a ser los axiomas de la teoría. Entonces, los axiomas o postulados son algunas proposiciones de la teoría que deliberadamente son aceptadas sin demostración. Los axiomas definen implícitamente a los términos primitivos o definidos.

Ejemplo. Axioma de extensión (para conjuntos)

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Por un lado, este axioma nos expresa que un conjunto queda bien determinado por la totalidad (extensión) de sus elementos. Entonces, si todos los elementos de un conjunto X son: 2, 4, 6, 8, y 10; escribimos

$X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Ejemplo. Hilbert, reconstruyó la geometría plana en base a 20 axiomas clasificados como:

- Axiomas de incidencia: ocho axiomas.
- Axiomas de orden: cuatro axiomas
- Axiomas de congruencia: cinco axiomas
- Axiomas de continuidad: dos axiomas
- Axiomas de paralelismo: un axioma

Ejemplo de axioma de incidencia: “Cualquiera que sean los puntos A y B, existe una recta L que pasa por cada uno de los puntos A y B”.

Nota. La necesidad de términos no definidos (primitivos) y proposiciones no demostradas (axiomas), se debe a que no es posible llevar la definición y la demostración indefinidamente.

Teoremas

Las demás proposiciones (los teoremas), deben ser buscados por medio de la demostración a partir de los axiomas. Entonces, los teoremas son las proposiciones de la teoría que son consecuencia lógica de los axiomas. En consecuencia, su veracidad debe probarse.

En general, un teorema es una proposición de la forma H $\Rightarrow$ T, donde H es la hipótesis y T es la tesis. Además de estos dos elementos se distingue una tercera parte: la demostración.

Demostración. Se llama así a la secuencia de proposiciones que termina con la tesis (conclusión), donde cada proposición es una hipótesis, un axioma, un teorema previo o una secuencia lógica de las proposiciones anteriores.

Ejemplo. La relación de igualdad entre conjuntos es transitiva. Es decir,

$$A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$$

Demostración.

Sea x un elemento cualquiera. Luego,

$$\begin{aligned} A = B \wedge B = C &\Rightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in C) && \text{(Axioma de extensión)} \\ &\Rightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in C) && \text{(Transitividad de la equivalencia lógica)} \\ &\Rightarrow A = C. && \text{(Axioma de extensión)} \end{aligned}$$

Corolario. Un corolario es una afirmación que se deduce inmediatamente de un teorema.

Ejemplo.

Teorema

Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces, f es biyectiva $\Leftrightarrow$ f es invertible.

Corolario

Si la función $f : A \rightarrow B$ es invertible, entonces la función $f^{-1}: B \rightarrow A$ es biyectiva.

1.2 Sistema axiomático

Podemos decir casi todas las verdades que componen la teoría son demostradas a partir de pocas verdades primeras o axiomas, que no se demuestran. Los conceptos primitivos no necesitan ser definidos, pues los conocemos intuitivamente. Los axiomas no necesitan ser demostrados, pues su efectividad es palmario y lo aceptamos por olfacción. Aplicar el deducción axiomático a un terreno alguien de la sinceridad consiste en preparar nuestros saberes acerca de ese terreno en la modo de argumento axiomática.Entonces, un sistema axiomático es una teoría desarrollada mediante el método axiomático. Es decir, está conformada por:

- Conceptos o términos primitivos.
- Conceptos definidos.
- Axiomas o postulados
- Teoremas.

Además, de los cuatro enumeradas existe otra que generalmente no se menciona, que es la lógica. Esta nos proporciona las reglas para demostrar los teoremas.

La siguiente es una exposición de la teoría de conjuntos de naturaleza intuitiva. En esta teoría, tomaremos como conceptos primitivos a las nociones de conjunto, elemento y las relaciones de pertenencia e igualdad; estos conceptos no se definen.

Formalmente, la relación de conjuntos se desarrolla mediante el método axiomático, y una exposición desarrollada mediante levante dialéctica se llama “sistema irrebatible”. Un sistema irrebatible, como se afirma líneas en lo alto, se entiende como una argumento desarrollada a partir de ciertos enunciados o axiomas mediante la aplicación de reglas lógicas. Es decir, en base a:

1. Términos primitivos (términos no definidos).
2. Términos definidos.
3. Axiomas o postulados.
4. Teoremas
5. Reglas lógicas.

En nuestro desarrollo intuitivo, de la teoría de los conjuntos, utilizaremos una relación primitiva que notaremos con “$\in$” llamada relación de pertenencia.

Un conjunto (o colección) está formado de objetos llamados sus elementos. La relación básica entre un conjunto y un objeto, del conjunto, es **la relación de pertenencia**. Los objetos serán susceptibles de tener relaciones o propiedades entre ellos. Estos objetos serán representados por símbolos y las propiedades o relaciones, por combinaciones de los símbolos.

A los conjuntos los simbolizamos, generalmente, mediante letras latinas mayúsculas, y a sus elementos con letras minúsculas, números u otros objetos; es decir

$A, B, C, \dots, a, b, c, \dots$, etc.

Relación de igualdad

Los objetos, elementos o conjuntos gozan de una de las relaciones más elementales, que es el de la igualdad; representada por "=" y se lee "igual". Entonces, si x e y son dos símbolos que representan elementos, la relación de igualdad se escribe por $x = y$. Es decir, x es igual a y si ambos representan a un mismo elemento.

Si el elemento x no es igual a y se escribe $x \neq y$. Es decir,

$\sim (x = \mathrm{y}) \equiv x \neq y.$

Relación de pertenencia

Cuando un objeto x es uno de los elementos que componen un conjunto A, diremos que "x pertenece al conjunto A", y escribimos

$x \in A$

Si por el contrario, x no es uno de los elementos del conjunto A diremos que "x no pertenece al conjunto A", y escribimos

$x \notin A$

Entonces,

$\sim (x \in A) \equiv x \notin A$.

Por ejemplo, si $A = \{. . . , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .\}$, tenemos $5 \in A$, $\sqrt{2} \notin A$.

1.3 Algunos axiomas bases de la teoría de conjuntos

En toda axiomatización de la teoría de conjuntos se necesita, por lo menos, de un axioma, regla o convenio que nos permita analizar en que condiciones varios conjuntos son el mismo conjunto; es decir, que nos permita extender o hacer una extensión del concepto de conjunto. Así, como otro axioma que nos permita definir tipos de conjuntos, es decir, un axioma que nos permita formar otros conjuntos.

La primera axiomatización apareció en el año 1908 con los axiomas de Zermelo. Entre los axiomas más conocidos de esta teoría, tenemos:

I Axioma de sustitución

"Sea $P(x)$ una proposición sobre x. Si $P(x)$ es verdadera y si $m = x$, entonces $P(m)$ es también verdadera".

Por ejemplo, sea $P(x)$ una proposición y $A = \{0, 1, 3, 5\}$ el dominio; tal que: $P(x)$: x $\in A$. Si $P(x)$ es verdadera, es decir, $x \in A$ es verdadera y si $x = 3$, entonces $P(3)$ es verdadera, pues $3 \in A$ es verdadera.

II Axioma de existencia

"Existe un conjunto"

1.4 Igualdad de conjuntos

Expresaremos la igualdad de conjuntos en términos de la relación de pertenencia. Además, entenderemos que $A = B$ si A y B son dos nombres diferentes para un mismo objeto.

III Axioma de extensión

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

O, también,

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)\,[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

Entonces,

Podemos decir, "si todos los elementos de A son elementos de B y todos los elementos de B son elementos de A".

Nota. El axioma de extensión asegura que si dos conjuntos tienen los mismos elementos, ambos son iguales, independientemente de cómo estén definidos.

Como todo conjunto tiene los mismos elementos que él mismo, se sigue del axioma de extensión.Si tenemos $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$ y $\{3, 1, 2\}$ podemos afirmar que estos conjuntos son iguales.También podemos expresar esta forma $\{x, y\}$, $\{x, y, y\}$ y $\{x, x, x, y\}$.A menudo es utilizado la eplise matemática para representar los elementos de un conjunto. Por ejemplo, el conjunto A de los números enteros del 1 al 576, se escribe

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 576\}$$

$$B = \{0, 2, 4,6 \ldots\ldots\}$$

Ejemplo. Indicar cual de los siguiente conjuntos son iguales.

$A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x$ es par $\wedge$ x^2 es impar$\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x = 2\,k$, para algún $k \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{1, 2, 3\}$

$D = \{0, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}$

$E = \{2\,x \,/\, x \in \mathbb{Z}\}$

$F = \{3, 3, 2, 1, 2\}$

Solución. Sea x cualquier número entero, entonces

- En el conjunto A:

x es par $\Rightarrow$ $x = 2\,k$, para algún k en $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $x^2 = 4\,k^2$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $x^2 = 2\,(2\,k^2)$, con $2\,k^2 = p \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $x^2 = 2\,p$, $p \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ x^2 es par

En consecuencia a este conjunto se le llama vacío. ($A = \phi$), por que no posee ningún elemento.

- En el conjunto B:

$x \in B \Leftrightarrow x = 2\,k,\, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x$ es par. Luego, $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \text{ es par}\}$

- En el conjunto C:

$$x \in C \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$$

- En el conjunto D:

$$D = \mathbb{Z} - \{1, -1\}$$

- En el conjunto E:

$$E = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \text{ es par}\} = 2\,\mathbb{Z}.$$

- En el conjunto F:

$$x \in F \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$$

- En el conjunto G:

$$x \in G \Leftrightarrow x^3 - 6\,x^2 - 7\,x - 5 = 0$$

No existe ningún número entero que satisfaga la ecuación anterior, por tanto, G es un conjunto vacío (G = ϕ).

De los resultados obtenidos, se sigue que

- $A = G$
- $B = E$
- $C = F$

- El conjunto D no es igual a ninguno de los otros.

Notas:

a) El axioma de extensión nos dice que lo que caracteriza a un conjunto son sus elementos. Es decir, un conjunto queda determinado por la totalidad (extensión) de sus elementos.

b) Si los todos los elementos de un conjunto A son p, q, r, s y t, escribimos $A = \{p, q, r, s, t\}$; donde las llaves sugieren la relación de pertenencia. En este caso diremos que el conjunto A, ha sido determinado.

c) Si $\sim (A = B) \equiv A \neq B$, diremos que A es diferente de B. Esto significa que, existe por lo menos un elemento x de tal que $x \notin B$ o que existe por lo menos un elemento x de B tal que x no es elemento de A. En símbolos:

$$A \neq B \iff (\exists\, x \,/\, x \in A \,\wedge\, x \notin B) \,\vee\, (\exists\, x \,/\, x \in B \,\wedge\, x \notin A)$$

Ejemplo. Necesitamos probar que dos conjuntos sean diferentes.

Solución. Diremos que A y B son dos conjuntos . Entonces, por el axioma de extensión

$$A = B \iff (\forall\, x)\, [(x \in A \Rightarrow x \in B) \,\wedge\, (x \in B \Rightarrow \mathrm{x} \in A)]$$

de aquí,

$$A = B \iff [\forall\, x,\ (x \in A \Rightarrow x \in B) \,\wedge\, \forall\, x,\ (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

y si negamos ambos miembros, tendremos

$$\sim (A = B) \iff \sim [\forall\, x,\ (x \in A \Rightarrow x \in B) \,\wedge\, \forall\, x,\ (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

por tanto,

$$A \neq B \Leftrightarrow \sim [\forall\, x,\ (x \in A \Rightarrow x \in B)] \vee \sim [\forall\, x,\ (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

$$\Leftrightarrow [\exists\, x \,/ \sim (x \in A \Rightarrow x \in B)] \vee [\exists\, x \,/ \sim (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

$$\Leftrightarrow [\exists\, x \,/ \sim (x \notin A \vee x \in B)] \vee [\exists\, x \,/ \sim (x \notin B \vee x \in A]$$

$$\Leftrightarrow (\exists\, x \,/\, x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

Asi queda demostrado que dos conjuntos son diferentes aplicando axioma de extensión

- $A = B$
- $A \neq B$

Ejemplo. Dados, A = {x $\in \mathbb{Z}$ / x|10} y B = {- 10, - 5, - 2, - 1, 1, 2, 5, 10} se tiene que A = B. Si A = B y B = C, entonces A = C (propiedad transitiva efecto, los elementos de A son números enteros divisores de 10. Es decir: -10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10.

Luego,A = {-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10} = B.

Proposición. De las siguientes propiedades:

1. para todo conjunto A, A = A (propiedad reflexiva);
2. para todo conjunto A y todo conjunto B,

   si A = B, entonces B = A (propiedad simétrica);
3. para todo conjunto A, todo conjunto B y todo conjunto C,

   Si A = B y B = C, entonces A = C (propiedad transitiva).

Prueba de 2). Probaremos que $A = B \Rightarrow B = A$.

En efecto,

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)\,[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

$$\Rightarrow (\forall x)\,[(x \in B \Rightarrow x \in A) \wedge (x \in A \Rightarrow x \in B)] \quad \text{(conmutatividad de la } \wedge)$$

$$\Leftrightarrow B = A \quad \text{(axioma de extensión)}$$

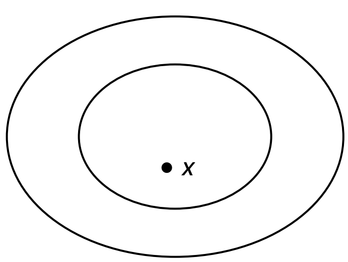
Por tanto, $A = B \Rightarrow B = A$.

1.5 Relación de inclusión. subconjuntos

Definición.- *A* y *B* son dos conjuntos. Donde *A* está contenido en *B* o que *A* es un subconjunto de *B,* y lo denotaremos por $A \subset B$, si cada elemento de *A* es un elemento de *B,* es decir,

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Descripción gráfica:



$x \in A \Rightarrow x \in$

Figura1.Grafica de inclusión

$A \subset B$ se lee: "*A* está incluido en *B*" o "*A* está contenido en *B*" o "*A* es parte de *B*" o "*A* es subconjunto de *B*".

Notas:

1. Cuando se escribe $A \subset B$ no está excluida la posibilidad que $A = B$.

2. Nótese que $A \subset B$ equivale a

$$(\forall\, x)\ (x \notin B \ \Rightarrow\ x \notin A) \qquad \text{¿por qué?}$$

3. Por definición de inclusión: si $x \in A$, entonces $\{x\} \subset A$.

Teorema. Caracterización de la igualdad.

$$\mathrm{A = B} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \ \wedge\ \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$$

Es decir, A = B si y sólo si A ⊂ B y B ⊂ A.

Demostración. Debemos probar la doble implicación.

- "Sólo si" (⇒) $\quad \mathrm{A = B} \ \Rightarrow\ \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \ \wedge\ \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$

Supongamos que A = B. Por el axioma de extensión, nos permita observar una reciprocidad.

Entonces, por la definición dada de subconjunto,

A ⊂ B y B ⊂ A. De aquí que

$$(\mathrm{A = B} \ \Rightarrow\ \mathrm{A} \subset \mathrm{B}) \ \wedge\ (\mathrm{A = B} \ \Rightarrow\ \mathrm{B} \subset \mathrm{A})$$

lo que equivale a

$$\mathrm{A = B} \ \Rightarrow\ \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \ \wedge\ \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$$

- "Si" (⇐) $\quad \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \ \wedge\ \mathrm{B} \subset \mathrm{A} \ \Rightarrow\ \mathrm{A = B}$

En efecto,

$$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow [(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)] \wedge [(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

$$\Rightarrow (\forall x)[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

$$\Rightarrow A = B \qquad \text{(axioma de extensión)}$$

Muchas veces se utiliza este teorema para afirmar que dos conjuntos son iguales

es decir, para probar que A = B, se debe probar que $A \subset B$ y $B \subset A$.

Otra forma de demostración del teorema anterior, es

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \quad \text{(Axioma de extensión)}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$$

$$\Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A \qquad \text{(Definición de inclusión)}$$

Ejemplo. Si $A = \{9n + 1 / n \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{9n - 8 / n \in \mathbb{Z}\}$, probar que A = B.

Solución. Como se pide probar una igualdad, debemos probar que:

i) $A \subset B$.

Sea x un elemento arbitrario de A. Entonces, x = 9n + 1. Luego,

$$x \in A \Rightarrow x = 9n + 1, \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 9n + (9 - 8) = (9n + 9) - 8$$

$\Rightarrow$ $x = 9(n + 1) – 8$

$\Rightarrow$ $x = 9m – 8$, para algún $n+1 = m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $x \in B$

Por tanto, $A \subset B$.

ii) $B \subset A$

Sea x un elemento arbitrario de B. Entonces, $x = 9n – 8$. Luego,

$x \in B \Rightarrow x = 9n – 8$, para algún $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $x = 9n + (- 9 + 1) = (9n – 9) + 1$

$\Rightarrow$ $x = 9(n – 1) + 1$

$\Rightarrow$ $x = 9p + 1$, para algún $n – 1 = p \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $x \in A$

Por tanto, $B \subset A$.

Entonces, de *(i)* y *(ii)* concluimos que $A = B$.

Nota. Los conjuntos numéricos$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ cumplen la relación de inclusión $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ **.** Abreviadamente, escribimos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

A partir de la definición de la relación de inclusión de conjuntos se establecen las siguientes propiedades.

Proposición. Estas proposiciones cumplen la siguientes propiedades.

1. para todo conjunto A , $A \subset A$. (propiedad reflexiva);

2. para cualquier conjunto A y para cualquier conjunto B,

si $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$ (propiedad antisimétrica);

3. para cualquier conjunto A, conjunto B y para cualquier conjunto C,

si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$ (propiedad transitiva)

Demostración.

Probaremos la propiedad transitiva: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Sea x un elemento cualquiera. Entonces,

$$
\begin{aligned}
A \subset B \wedge B \subset C &\Rightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in C) \\
&\Rightarrow (\forall x)[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)] \\
&\Rightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C) \quad \text{(transitividad de la implicación lógica)} \\
&\Rightarrow A \subset C \quad \text{(definición de inclusión)}
\end{aligned}
$$

Otra forma: Sea x un elemento cualquiera. Entonces,

$$
\begin{aligned}
x \in A &\Rightarrow x \in B \wedge x \in C \quad \text{(de la hipótesis)} \\
&\Rightarrow x \in C \quad \text{(por ley de simplificación)}
\end{aligned}
$$

Como x es cualquiera, y tomando los extremos se tiene,

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subset C.$$

La no inclusión, se escribe $A \not\subset B$.

Ejemplo. Encontremos una manera de probar que A no está incluido en B.

Solución. Por definición de subconjunto, tenemos

$$A \subset B \iff (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

y si negamos ambos miembros, tenemos

$$\sim (A \subset B) \iff \sim [(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)]$$

entonces,

$$A \not\subset B \iff \exists\, x \,/\, \sim (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$\iff \exists\, x \,/\, x \in A \wedge x \notin B$$

La manera de probar de que no hay una inclusión que haya al menos un elemento que de A que no está incluido en B o viceversa.

$$A \not\subset B \iff \exists\, x \,/\, x \in A \wedge x \notin B.$$

Descripción gráfica. (Es de gran utilidad)

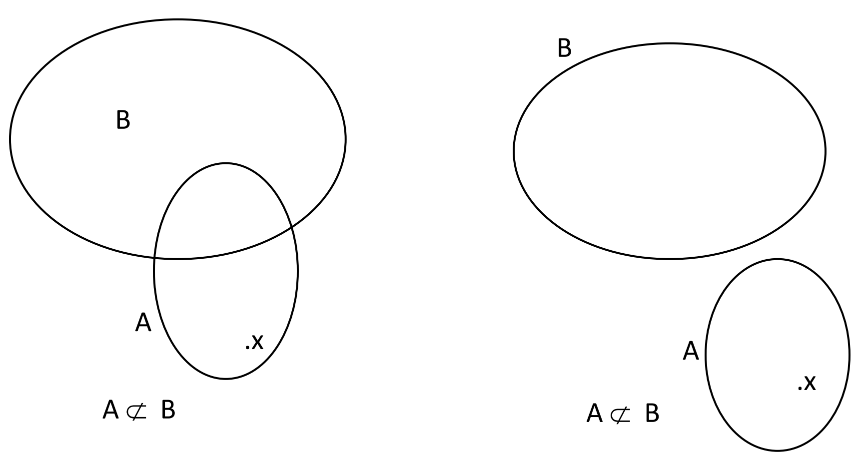


*Figura 2.*Gráfica de no inclusión

Nota. Los gráficos me darán una mejor idea de lo que deseo plasmar.

1.6 La relación inclusión estricta. Subconjunto propio

Supongamos que tenemos los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$. Cuando A y B no son iguales, puede ocurrir que todos los elementos de A pertenecen también a B. En este caso se dice que A es subconjunto propio de B .

Definición: Se dice que A es subconjunto propio de B, y se escribe $A \subsetneq B$, si y sólo si $A \subset B$ y $A \neq B$.Es decir, si $A \subset B$ y además B tiene un elemento que no está en A, diremos que A es subconjunto propio de B o que A está estrictamente incluido en B y lo notaremos por $A \subsetneq B$. Entonces,

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subset B \wedge (\exists x / x \in B \wedge x \notin A)$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; se observa que todo elemento de A, es elemento de B ($A \subset B$); y A es diferente de B ($A \neq B$). Luego, A es subconjunto propio de B y escribimos $A \subsetneq B$.

Conjuntos comparables

Dos conjuntos A y B son comparables si $A \subset B \vee B \subset A$.

Equivalentemente, dos conjuntos A y B no serán comparables, si $A \not\subset B \wedge B \not\subset A$.

Ejemplo, si $A = \{0, 2, 4\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$; A y B son comparables.

IV. Axioma de especificación

El axioma de especificación, nos permite construir nuevos conjuntos a partir de otros.

"Dado un conjunto E y una función proposicional P (x) con dominio el conjunto E, existe un único subconjunto A de E; cuyos elementos son todos los elementos x de E tal que P(x) es verdadera".

En símbolos: $\forall\, E, \exists!\, A \,/\, (\forall\, x)\, [x \in A \leftrightarrow (x \in E \;\wedge\; P(x) \text{ es verdadera})]$

Este sentencia nos dice que para cualquier finca (expresada por P (x)) y cualquier colectividad E, existe un subconjunto A de E en línea por los medios de E que verifican esa propiedad. Obviamente oriente subconjunto es único. Es cotorrear, A es el universalismo de los rudimentos de E que verifican la dominio P (x) y que P (x) es la dominio nota del mayoría A. Se escribe

$$A = \{x \,/\, x \in E \;\wedge\; P(x) \text{ es verdadera}\} \text{ o}$$

$$A = \{x \in E \,/\, P(x) \text{ es verdadera}\}$$

o simplemente

$$A = \{x \in E \,/\, P(x)\}$$

y se lee "A es el conjunto de los elementos de E tales que P (x)".

Así, dado $x \in E$, se tiene

$$x \in A \Leftrightarrow P(x)$$

Caracterizamos a los elementos de A por,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in E \;\wedge\; P(x)$$

Ejemplos:

1. Sea $E = \mathbb{Z}$ (es conjunto de los enteros) y P(x): $x > 0$. Entonces, por el axioma de especificación, existe $\mathbb{Z}^+$ es la totalidad de los enteros positivos. Luego,

$\mathbb{Z}^+ = \{x / x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\} = \{x \in \mathbb{Z} / x > 0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

2. Sea $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (sea un plano que contiene una totalidad de puntos) y sea

P (x, y): $x + y - 3 = 0$. Entonces, por el axioma de especificación, existe el conjunto L donde su ecuación es $x + y - 3 = 0$ (L: $x + y - 3 = 0$). Por tanto,

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y - 3 = 0\}$$

3. Supongamos que $E = \mathbb{R}$ (los reales formado por su totalidad) y consideremos la propiedad

P(x): $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

Entonces podemos decir que exite el conjunto A que la solución

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$. Por tanto,

$A = \{x \in \mathbb{R} / x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0\} = \{-3, -1, 2\}$

En efecto,

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 1)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ x - 2 = 0 \ \vee \ x + 1 = 0 \ \vee \ x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ x = 2 \ \vee \ x = -1 \ \vee \ x = -3$$

4. Pongamos $E = \mathbb{R}$ (el conjunto de los números reales) y sea P (x): $x^2 + x + 1 = 0$. En este caso existe B cuyos elementos vendrán a ser las posibles soluciones.$x^2 + x + 1 = 0$. Luego,

$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0\} = \{ \} = \phi$

Pues, la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene raíces reales. En efecto, el discriminante

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 (1) (1) = -3 < 0$

En este caso las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + x + 1 = 0$, son complejas. En efecto,

$$x^2 + x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2} \notin \mathbb{R}$$

Nota. A los polinomios de grado dos (coeficiente de x^2 es positivo) cuyas raíces no son reales (son complejas) se les llama polinomios positivos, pues para el polinomio anterior se tiene

$\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 + x + 1 > 0$

Notas:

1. El axioma de especificación fue formulado por Zermelo en 1908. También se le conoce con el nombre de axioma de separación o axioma de formación de conjuntos

Ejemplo. Supongamos que existe el conjunto E = {polígonos}. Usando el axioma de especificación, podemos asegurar la existencia del conjunto A = {triángulos}. Es decir, la propiedad de tener tres lados separa a los triángulos del resto de polígonos.

2. Este axioma, nos permite construir nuevos conjuntos a partir de otros originales. Además, nos proporciona un nexo entre el lenguaje de las proposiciones y el lenguaje de los conjuntos.

3. Los elementos del conjunto A, $A \subset E$, se pueden caracterizar por la siguiente condición:

$x \in A \iff P(x)$ es verdadera

4. El mal uso del axioma de especificación condujo a muchas contradicciones como la conocida paradoja del matemático inglés Bertrand Russell, descubierta en 1901. "un objeto pertenece al conjunto R si y sólo si no pertenece a si mismo". Es decir, formado por todos los conjuntos que tienen la propiedad de no ser elementos de si mismo ($P(x)$: $X \notin X$).

$R = \{X / X \notin X\}$

Podríamos evaluar si R pertenece a R . Si la respuesta es afirmativa o negativa, tenemos:

$$R \in R \Rightarrow R \notin R \text{ (por definición de R)}$$

$$R \notin R \Rightarrow R \in R \text{ (por definición de R)}$$

Luego,

$(R \in R \Rightarrow R \notin R) \wedge (R \notin R \Rightarrow R \in R) \equiv R \in R \iff R \notin R$ que es una contradicción;

En efecto,

$$(R \in R \Rightarrow R \notin R) \wedge (R \notin R \Rightarrow R \in R) \equiv (R \notin R \vee R \notin R) \wedge (R \in R \vee R \in R)$$

$$\equiv R \notin R \wedge R \in R \ (\rightarrow \leftarrow)$$

$$\equiv C \text{ (contradicción)}$$

¿Qué condujo a esta contradicción?

La noción de que a cada propiedad P(x) le debe corresponder un conjunto; es decir, el mal uso del axioma de especificación. Según este axioma, no basta con tener una función proposicional como P(x): R $\notin$ R para definir un conjunto. Se debe tener, además, un conjunto previo que haga el papel de dominio de la función proposicional.

Tengamos encuentra que al tratar de armar el conjunto de todos los conjuntos se verifica una regla universal cualquiera P (x). El axioma de especificación,nos parametra la realización de nuevos conjuntos ,solo podemos enfocarnos en el conjunto en que se está trabajando.

5. Si un conjunto es definido mediante el axioma de especificación, se puede mencionar el tal conjunto esta expresado en **forma constuctiva**.Así, el conjunto A = $\{x \in \mathbb{Z} / 4 \leq x \leq 20\}$ ha sido determinado o definido por comprensión. Aquí, la función proposicional es ($\mathbb{Z}$, P(x)), donde:

- $\mathbb{Z}$: es el dominio.
- P(x): $4 \leq x \leq 20$.
- A: dominio de verdad, tal que:

A = {4, 5, 6, …, 20}: determinado o definido por extensión;

A = $\{x \in \mathbb{Z} / 4 \leq x \leq 20\}$: determinado o definido por comprensión.

1.7 Determinación de un conjunto

Un conjunto, A, queda determinado, definido o caracterizado, cuando se da una regla o propiedad ,un objeto arbitrario donde podemos observar y un x pertenece al conjunto o no pertenece al conjunto A.

Ejemplo. Sea A, el conjunto de los triángulos isósceles. Este conjunto está bien definido. Pues, un objeto “x” pertenece al conjunto A cuando es un triángulo y dos de sus lados tienen la misma medida. Si “x” no fuese un triángulo, o si “x” fuese un triángulo cuyos tres lados tengan medidas diferentes, entonces “x” no pertenece al conjunto A

En el ejemplo anterior, la propiedad que define a los elementos de A está dada por la función proposicional, P(x): “x es un triángulo isósceles”; cuyo dominio es el conjunto X = {triángulos}.

El método más frecuente de definir un conjunto es a través de una propiedad P(x), común y exclusiva de sus elementos, y un conjunto E (dominio) donde la variable x toma sus valores; de modo tal que P(x) sea verdadera. Esto define un conjunto A, de manera que: si un objeto goza de la propiedad P, entonces $x \in A$; y si x no goza de la propiedad P, entonces $x \notin A$. Se escribe,

$$A = \{x \in E \ / \ x \text{ goza de la propiedad } P\} = \{x \in E \ / \ P(x) \text{ es verdadera}\}$$

Cuando ocurre este suceso podemos afirmar que esta expresado por **forma constructiva.** Se lee “A es el conjunto de los elementos x de E, tales que x goza de la propiedad P”.

Por ejemplo, si $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ -3 \leq x < 5\}$, entonces se dice que A está determinado por comprensión.

1.8 Algunos conjuntos especiales

1.8.1 El Conjunto Vacío

Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \;/\; 2 < 7x - 5 < 9\}$. Encontremos los elementos que forman el conjunto dado. En primer término, la propiedad que define a los elementos de A está dada por la desigualdad $2 < 7x - 5 < 9$; es decir, los números naturales que satisfacen dicha desigualdad. Entonces, resolviendo se tiene:

$$2 < 7x - 5 < 9$$

Sumando 5 cada miembro de la desigualdad, se obtiene:

$$2 + 5 < 7x - 5 + 5 < 9 + 5$$

$$7 < 7x < 14$$

Dividiendo por 7 cada miembro de la desigualdad, obtenemos:

$$\frac{7}{7} < \frac{7x}{7} < \frac{14}{7}$$

$$1 < x < 2$$

Luego, como no existe ningún número natural que satisface la desigualdad anterior, el conjunto A no tendría ningún elemento, o sea $A = \{\ \}$. Por convención, a todo conjunto que carece de elementos se le denomina conjunto vacío y se acostumbra a denotarlo con la letra del alfabeto escandinavo ϕ. En el ejemplo anterior observamos que tal conjunto vacío es un subconjunto de los números naturales, o sea $A = \phi \subset \mathbb{Z}$.

De lo anterior, sacamos como resultado que a veces ocurre que ningún elemento de E goza de la propiedad P. En este caso el conjunto $\{x \in E \,/\, x \text{ goza de } P\}$ no posee elemento alguno. A este conjunto se le llama **conjunto vacío ó nulo**.

Entonces, el axioma de especificación nos permite asegurar la existencia del conjunto vacío.

Definición.- Si A es un conjunto. Podemos expresar el conjunto "vacío de A", denotado por ϕ_A,

$\phi_A = \{x \in A \,/\, x \neq x\}$

Observaciones:

1. El conjunto vacío no tiene elementos, pues $\forall\, x \in A$, se cumple $x = x$.
2. Por definición y el axioma de especificación, ϕ_A es subconjunto de A: $\phi_A \subset A$.

   Por ejemplo, supongamos, en particular, que $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $P(x) : x \neq x$. Luego,

   $P(1): 1 \neq 1$ (F)

   $P(3): 3 \neq 3$ (F)

   $P(5): 5 \neq 5$ (F)

   $P(7): 7 \neq 7$ (F)

   Entonces,

   Dominio de verdad: $\{\ \} = \phi_A$

   Por el axioma de especificación:

   - $\phi_A = \{\ \}$, no tiene elementos.
   - $\phi_A \subset A$
3. Para cada conjunto A se ha definido un conjunto ϕ_A. Se probará que todos estos conjuntos son iguales, y por tanto, existe un solo conjunto vacío; al que se simbolizará por ϕ.

Teorema:

1) Existe un único conjunto vacío, al que denotaremos por ϕ.

2) $\phi \subset A, \forall A$.

Demostración.

1) Sean A y B dos conjuntos cualesquiera.

a) Existencia.

Por el axioma de especificación existen ϕ_A y ϕ_B.

b) Unicidad. Probaremos, entonces, que $\phi_A = \phi_B$.

Por el teorema de la igualdad, tenemos que

$$\phi_A = \phi_B \Leftrightarrow \phi_A \subset \phi_B \wedge \phi_B \subset \phi_A$$

Entonces, probaremos que $\phi_A \subset \phi_B \wedge \phi_B \subset \phi_A$.

i) $\phi_A \subset \phi_B$.

Apliquemos el absurdo, especulemos que $\phi_A \not\subset \phi_B$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \phi_A \not\subset \phi_B &\Rightarrow \exists\, x \in A \,/\, x \in \phi_A \wedge x \notin \phi_B \\ &\Rightarrow \exists\, x \in A \,/\, x \in \phi_A \\ &\Rightarrow x \in \phi_A \quad (\rightarrow\leftarrow) \text{ contradicción} \end{aligned}$$

Pues, si $x \in \phi_A$ se debe tener que $x \in A \wedge x \neq x$, lo cual no es posible.

Por tanto, admitimos que $\phi_A \subset \phi_B$.

ii) $\phi_B \subset \phi_A$.

En forma similar a *i*).

En consecuencia, de *i*) y *ii*) se tiene que $\phi_A = \phi_B$.

Como todos los “vacíos” son iguales, denotamos

$\phi_A = \phi_B = \phi$.

2) Sea A un conjunto cualesquiera.

Como $\phi_A = \phi$, por la parte *i*) del teorema y $\phi_A \subset A$, por definición de conjunto vacío, entonces concluimos que $\phi \subset A$, $\forall$ A.

Nota. Si B es un conjunto tal que $B \subset A$ para todo conjunto A, entonces $B = \phi$. Es decir, podemos aseverar que el conjunto vacío está incluido en todo conjunto.

Se cumple:

i) $\forall$x, y la implicacion de que $x \in \phi$ es falacia.

ii) aseveramos que B es conjunto esto implica que $x \in B$ es falacia $\forall$x,concluimos $B = \phi$.

Ejemplo. El conjunto A = $\{x \in \mathbb{Z}$ tal que x es un número par y x^2 es un número impar$\}$ es vacío. En efecto, sea x cualquier número entero. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow x \text{ es número par } \wedge x^2 \text{ es número impar} \\ &\Leftrightarrow x = 2k, k \in \mathbb{Z} \wedge x^2 \text{ es impar} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4k^2 \wedge x^2 \text{ es impar} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2(2k^2) \wedge x^2 \text{ es impar} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2p, p \in \mathbb{Z} \wedge x^2 \text{ es impar} \\ &\Leftrightarrow x^2 \text{ es par } \wedge x^2 \text{ es impar} \quad (\rightarrow\leftarrow) \end{aligned}$$

Esta proposición es falsa. Es decir, $A = \phi$.

Ejemplo. Probar que

$A \subset \phi \Rightarrow A = \phi$.

Solución.

$A \subset \phi$, por hipótesis. Por otro lado, $\phi \subset A\ \forall\ A$, por teorema anterior. Por tanto,

$$A \subset \phi \ \wedge\ \phi \subset A \ \Leftrightarrow\ A = \phi. \text{ (por teorema de la igualdad)}$$

Nota. En el desarrollo axiomático propuesto por Zermelo – Fraenckel (ZF) se enuncia el axioma del conjunto vacío: "existe un conjunto que no contiene ningún elemento".

V. Axioma del Par

"Para cualquier par de elementos *a* y *b*, existe un conjunto cuyos únicos elementos son *a* y *b*".

Es decir, dados *a* y *b*, cualesquiera, existe un conjunto A tal que $a \in A$ y $b \in A$.

Notas:

1. El conjunto $\{a, b\}$ es único y se le llama par no ordenado formado por *a* y *b*. De manera que el axioma del par junto con el axioma de especificación nos permite construir nuevos conjuntos.

Así, dado el conjunto $A = \{a, b, \ldots\}$, por el axioma de especificación, con la función proposicional $P(x)$: $x = a \ \vee\ x = b$, obtenemos el conjunto

$$\{x \in A \,/\, x = a \ \vee\ x = b\}$$

y lo denotamos por

$$\{a, b\} = \{x \in A \,/\, x = a \ \vee\ x = b\} = \{x \in A \,/\, x = b \ \vee\ x = a\} = \{b, \underline{a}\}$$

2. En particular, si $a = b$, la función proposicional $P(x)$: $x = a \ \vee\ x = b$, es $P(x)$: $x = a \ \vee\ x = a$

Es decir, $P(x)$: $x = a$. Luego,

$$\{a,\ a\} = \{x \in A \,/\, x = a \ \vee\ x = a\} = \{x \in A \,/\, x = a\}$$

A este último conjunto que tiene como único elemento a a lo denotaremos por $\{a\}$.

Entonces, $\{a, a\} = \{a\}$. Al conjunto $\{a\}$, se le llama conjunto unitario.

1.8.2 Conjunto Unitario

Definición.- Sea X un conjunto no vacío, es decir $X \neq \phi$, y sea $a \in X$. Si $P(x)$ es la proposición dada por "$x = a$", entonces por el axioma de especificación existe y es único el conjunto.

$\{x \in X / x = a\}$

Podemos expresar el conjunto por $\{a\}$ y se lee: conjunto unitario. Entonces,

$\{a\} = \{x \in X / x = a\}$

Luego, se tiene: $\phi \subset \{a\} \subset X$.

De la definición, se observa que un conjunto A se llama unitario cuando posee un solo elemento. Es decir,

$A = \{x \in E / x = a\} = \{a\}$.

En los siguientes casos, el conjunto A es el mismo y posee un sólo elemento. O sea, si A es unitario $A = \{e, e, e\} = \{e, e\} = \{e\}$. En la escritura de los elementos de un conjunto, es costumbre escribir una sola vez aquellos elementos que se repiten.

Nota. Si se tiene que el conjunto $A = \{a, b\}$ es unitario, entonces $a = b$.

Por ejemplo si el conjunto $A = \{x^2 + 1, 2x\}$ es un conjunto unitario, con respecto a sus elementos, debe cumplirse que

$$x^2 + 1 = 2x. \text{ Entonces, } x^2 - 2x + 1 = 0$$

de donde

$$(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Por tanto, para $x = 1$ en A, tenemos que $A = \{1^2 + 1, 2(1)\} = \{2, 2\} = \{2\}$.

1.8.3 Conjunto universal o referencial $\mathbb{U}$

Se demuestra que no existe un conjunto universo que contenga a todos los conjuntos (Paradoja de Russell), en cambio existe un conjunto universo de referencia denotado por $\mathbb{U}$ *o* $\mathbb{E}$. Así por ejemplo, para los conjuntos

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{P} = \{\ldots, -2, 0, 2, \ldots\}$ y $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$

el conjunto universal o referencia será $\mathbb{U} = \mathbb{Z}$.

El conjunto universal no es único. Este cambia de acuerdo al tema que se está tratando. Así, si hablamos de geometría, el conjunto referencia es el conjunto de todos los puntos; si hablamos de los divisores de un número entero, el conjunto referencial es el conjunto formado por todos los números enteros., etc.

Veamos una proposición

Si $\mathbb{U}$ es referencial y A un conjunto de elementos de $\mathbb{U}$. Entonces $A \subset \mathbb{U}$.

En efecto,

$A \subset \mathbb{U} \leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in \mathbb{U}$ es una aseveración para cada x de $\mathbb{U}$.

Si todos los $x \in \mathbb{U}$, luego si hay un $x \in A$ sea una aseveración o falacia. Siendo x un elemento distinto, se tiene que

$$(\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in \mathbb{U})$$

Es aseveración y, en consecuencia,

$$A \subset \mathbb{U}$$

1.9 Subconjuntos de un Conjunto

Ejemplo. Determinar los subconjuntos del conjunto $A = \{a, b\}$.

Solución. Veamos cuantos subconjuntos tiene el conjunto A.

Por teorema anterior podemos observar que obtenemos 4 subconjuntos aquí estaría incluido el conjunto vacío estos subconjuntos que son los siguientes:

$\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

De las siguientes relaciones e inclusiones diga cuales son verdaderas

$\{a\} \subset \{a, b\}$ (V) $\{a\} \notin \{a, b\}$ (V)

$a \in \{a, b\}$ (V) $\phi \subset \{a, b\}$ (V)

$a \not\subset \{a, b\}$ (V) $\phi \notin \{a, b\}$ (V)

El conjunto $\{\{a\}\}$ es un conjunto unitario ya que tiene un único elemento, el conjunto $\{a\}$. Sus subconjuntos son el ϕ y el $\{\{a\}\}$.

Ejemplo. Hallemos los subconjuntos del conjunto $B = \{2, 4, 6\}$.

Solución. Utilizamos la definición de subconjunto,

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\phi \subset B$ (Por propiedad).

$2 \in B$, luego $\{2\} \subset B$.

$4 \in B$, luego $\{4\} \subset B$.

$6 \in B$, luego $\{6\} \subset B$.

$2 \in B$ y $4 \in B$, luego $\{2, 4\} \subset B$.

$2 \in B$ y $6 \in B$, luego $\{2, 6\} \subset B$.

$4 \in B$ y $6 \in B$, luego $\{4, 6\} \subset B$.

$2 \in B$, $4 \in B$ y $6 \in B$, luego $\{2, 4, 6\} \subset B$.

Por tanto, los subconjuntos de B son

ϕ, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$ y $\{2, 4, 6\} = B$

Nota. 2^n representa la cantidad de subconjutos,donde n representa la cantidad de elementos.

VI. Axioma de las Potencias

A este axioma se le conoce, también, como axioma del conjunto de partes; y junto con el axioma de especificación nos permite construir nuevos conjuntos.

"Para todo conjunto existe otro conjunto que tiene entre sus elementos todos los

Subconjuntos del conjunto dado".

Observaciones:

1. Este axioma nos dice que si E es un conjunto cualesquiera, entonces existe un conjunto P

tal que:

$X \subset E \Leftrightarrow X \in P$

Equivalentemente:

$X \not\subset E \Leftrightarrow X \notin P$.

2. Como $\phi \subset E$ y $E \subset E$, entonces $\phi \in P$ y $E \in P$.

3. El conjunto P puede tener otros elementos, además de los subconjuntos de *E*, y lo que se busca es un conjunto y sólo uno cuyos elementos sean todos los subconjuntos o partes de *E*. Tal conjunto lo denotaremos con $\mathcal{P}$(E) y lo llamaremos conjunto potencia o conjunto de partes de *E*.

1.10 Conjunto Potencia o Conjunto de Partes

A = {0, 2}, es posible formar con los elementos de A nuevos conjuntos, como por ejemplo {0}, {2}, {0, 2} (que es el mismo A). Estos conjuntos son subconjuntos de A incluyendo al conjunto vacío; pues sabemos que $\phi \subset A$, para cualquier A. Encerrando entre llaves a estos subconjuntos de A, formamos el conjunto $\{\{0\}, \{2\}, A, \phi\}$. A este conjunto se le llama el conjunto parte de A (Potencia).

Definición.- A es un conjunto y P es conjunto propuesto por axioma de las potencias.

Lo expresaremos de la siguiente forma:

$$P(A) = \{X \in P / X \subset A\}$$

Podemos aseverar que los todos lo subconjuntos de a vienen a ser los la P(A)

Equivalencias: $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$.

Afirmar que X $\in$ P (A) es lo mismo que decir X $\subset$ A. Por tanto, podemos caracterizar a los elementos de P (A) por:

$$X \in P(A) \Leftrightarrow X \subset A$$

El conjunto potencia P (A), nunca es vacío; pues tiene por lo menos a ϕ y a A como elementos. Es decir, $\phi \in$ P (A) y $A \in$ P (A).

Por ejemplo:

a. Si $A = \phi$, entonces P (ϕ) = $\{\phi\}$. P (A), tiene un solo elemento. O sea $2^0 = 1$.

b. Si A = {a} , entonces P (A) = $\{A, \phi\}$. P (A), tiene dos elementos. Es decir, $2^1 = 2$.

c. Si A = {a, b}, entonces P (A) = $\{A, \phi, \{a\}, \{b\}\}$.P (A), tiene cuatro elementos. Es decir, $2^2 = 4$.

d. Si A = {a, b, c}, entonces P (A) = $\{A, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.P (A), tiene ocho elementos. O sea $2^3 = 8$.

e. Si A = {a, b, c, d}, entonces

$$\mathcal{P}(A) = \begin{Bmatrix} A, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \\ \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\} \end{Bmatrix}$$

$\mathcal{P}$ (A), tiene dieciséis elementos. Es decir, $2^4 = 16$.

Nota**.** Es decir, P (A) tiene 2^n donde, n es la cantidad de elementos.

En otros términos, debemos de contar la cantidad de subconjuntos de *A*. tenemos el conjunto vacío, es decir $\binom{n}{0} = 1$, es decir, tantos como combinaciones de *n* elementos de orden 0. EL Conjunto unitario $\binom{n}{1} = n$, es decir, tantos como combinaciones de *n* elementos de orden 1.hasta formar $\binom{n}{n} = 1$. Por tanto, el número total está dado por :

$$1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + 1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{i} \cdot 1^{n-i}$$

$$= (1 + 1)^{n} \quad \text{(Por el Binomio de Newton)}$$

$$= 2^{n}$$

El nombre de conjunto potencia proviene del resultado anterior.

Ejemplo. Demostrar que se cumple, $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$.

Demostración. Como se pide demostrar una equivalencia, debemos probar que:

i) "Sólo si" ($\Rightarrow$) $\quad A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$

Sea x un elemento cualesquiera. Entonces,

$$\{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \subset A$$

$$\Rightarrow x \in A$$

$$\Rightarrow x \in B \quad \text{(por hipótesis)}$$

$$\Rightarrow \{x\} \subset B$$

$$\Rightarrow \{x\} \in P(B)$$

Por tanto, $P(A) \subset P(B)$.

ii) "Si" ($\Leftarrow$) $\quad P(A) \subset P(B) \Rightarrow A \subset B$

$$x \in A \Rightarrow \{x\} \subset A$$

$$\Rightarrow \{x\} \in P(A)$$

$$\Rightarrow \{x\} \in P(B) \quad \text{(Por hipótesis)}$$

$$\Rightarrow \{x\} \subset B$$

$$\Rightarrow x \in B$$

Por tanto, A ⊂ B.

Por tanto, de (*i*) y (*ii*) se concluye que A ⊂ B ⇔ P (A) ⊂ P (B).

Ejemplo. Si A = {a, b, c, d, e, f, g, h}, ¿cuántos subconjuntos de tres elementos tiene A?, ¿de seis elementos?

Solución. Lo que se pide es hallar todos los subconjuntos (combinaciones) de 3 elementos de un conjunto de 8. Es decir, la fórmula $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ representa el número total de subconjuntos de m elementos de un conjunto de n elementos. Entonces, en el caso particular n = 8, m = 3 tenemos

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\ x\ 5!} = \frac{8\ x\ 7\ x\ 6\ x\ 5!}{6\ x\ 5!} = 56$$

Por lo tanto, A tiene 56 subconjuntos de 3 elementos. Es decir, P (A) tiene 56 elementos formados por tres elementos de A.

También, $\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \frac{8\ x\ 7}{2!} = \frac{56}{2} = 28$.

Luego, A tiene 28 subconjuntos de 6 elementos.

Ejercicios Propuestos

1. Realizamos un experimento aleatorio donde se lanza tres monedas. Si sale cara, se anota 1, y si sale sello se anota 0. cual serán posibles resultados del experimento**.**

2. Del ejercicio número uno, determinaremos por extensión los posibles resultados

a) A: se dan más caras que sellos.

b) B: se obtienen al menos dos caras.

c) C: se obtienen el mismo resultado en las tres monedas.

3. Expresar por forma tabular los ejercicios siguientes.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x^3 = x\}$

b) $B = \left\{b \in \mathbb{Z} / \frac{b+3}{b+1} = -3\right\}$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{Q} / x = 3n + \frac{1}{4}, n \in \mathbb{Z}, -1 \leq n \leq 2\right\}$

d) $D = \{n \in \mathbb{N} / n | 36\}$

4. Determinar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) $\phi \subset A$, para todo conjunto A

b) $\phi \subset P(A)$, para un conjunto A

c) $\phi \in P(A)$, para un conjunto A

d) $\{\phi\} \in \{\{\phi\}\}$

e) $\{\phi\} \subset P(A)$, para un conjunto A   *f*) $\phi \subset P(\phi)$

g) $\{2\} \in P(\mathbb{Z})$ *h*) $\phi \in P(\phi)$

5. Sea *P* representa el todos los polígonos, *R* representa todos los rectángulos, *C* representa todos los cuadriláteros y *B* representa todos los rombos. Representar estos cuatro conjuntos en un solo diagrama de Venn. verificar cuales son verdaderas

a) $(\forall x)(x \in R \Rightarrow x \in C)$ *b*) $R \subset C$

c) $(\exists x)(x \in C \wedge x \in B)$ *d*) $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in C)$

e) $B \subset C$ *f*) $(\exists x)(x \in R \wedge x \notin B)$

g) $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \notin R)$ *h*) $(\exists x)(x \in P \wedge \underline{x} \in \underline{R})$

6. Si es posible, dar un ejemplo de conjuntos A, B y C que cumplan:

a) $A \subset B$, $B \not\subset C$ y $A \subset C$ *b*) $A \subset B$, $B \subset C$ y $C \subset A$

c) $A \not\subset B$, $B \not\subset C$ y $A \subset C$ *d*) $A \subset B$ y $P(B) \subset P(A)$

e) $A \not\subset B$, $B \subset C$ y $P(A) \subset P(C)$ *f*) A tal que $P(\phi)$

7. Si P (A) tiene 512 elementos, ¿cuántos elementos tiene A?

8. Probar que la relación de inclusión propia es transitiva, pero no es reflexiva.

9. Si $A \subset B$, $B \subset C$ y $C \subset A$, probar que $A = B = C$.

10. Si $A = \{5n+2 / n \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{5n - 3 / n \in \mathbb{Z}\}$, probar que $A = B$.

CAPÍTULO II

Operaciones con Conjuntos

2.1 Introducción

Por la importancia que desempeñan los conjuntos, en la teoría de conjuntos, estudiaremos las siguientes operaciones: Intersección, unión o reunión, diferencia, complemento, diferencia simétrica y producto cartesiano de conjuntos.

Para definir estas operaciones, y construir nuevos conjuntos a partir de dos conjuntos dados, debemos hacer uso del axioma de especificación; y contar con un conjunto que contenga a los conjuntos A y B. Para ello, consideremos el siguiente convenio: Dados dos conjuntos A y B, siempre es posible encontrar un conjunto $\mathbb{E}$ tal que $A \subset \mathbb{E}$ y $B \subset \mathbb{E}$. Entonces, tenemos el siguiente axioma:

VII. Axioma de la Unión

"Para toda familia de conjuntos F , existe un conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos de la familia dada".

Este axioma, nos dice que dada cualquier familia F de conjuntos existe un conjunto $\mathbb{E}$ tal que si $a \in X$, para algún $X \in F$, entonces $a \in \mathbb{E}$.

Por ejemplo, sea la familia de conjuntos {A, B, C}, tal que

$A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{4, 5, 8\}$ y $C = \{0, 2, 4, 6. 8\}$

entonces, para

$F = \{A, B, C\} = \{\{0, 1, 2\}, \{4, 5, 8\}, \{0, 2, 4, 6. 8\}\}$

existe $\mathbb{E} = \{0, 1, 2, 4, 6, 8,\}$, tal que si $1 \in A$, $A \in F$, entonces $1 \in F$.

2.2 Unión de Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Por el axioma de la unión existe un conjunto $\mathbb{E}$ tal que $A \subset \mathbb{E}$ y $B \subset \mathbb{E}$. Por el axioma de especificación existe un conjunto

$\{x \in \mathbb{E} / P(x): x \in A \vee x \in B\}$

Entonces definimos la unión de los conjuntos A y B como:

Definición.- Sean A y B dos conjuntos y sea el conjunto $\mathbb{E}$ propuesto por un axioma llamado unión para la familia {A, B}. Se llama unión o reunión de A y B al conjunto:

$A \cup B = \{x \in \mathbb{E} / x \in A \vee x \in B\}$

Esto es, afirmar que $x \in A \cup B$ significa que por lo menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera: $x \in A$ o $x \in B$. Por lo podemos caracterizar a los elementos de la unión con la siguiente expresión.

Caracterización: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

O en forma equivalente: $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

Entonces, $x \in A \cup B$, si se verifican las condiciones siguientes:

i) $x \in A$ y $x \in B$,

ii) $x \in A$ y $x \notin B$,

iii) $x \notin A$ y $x \in B$.

Descripción gráfica:

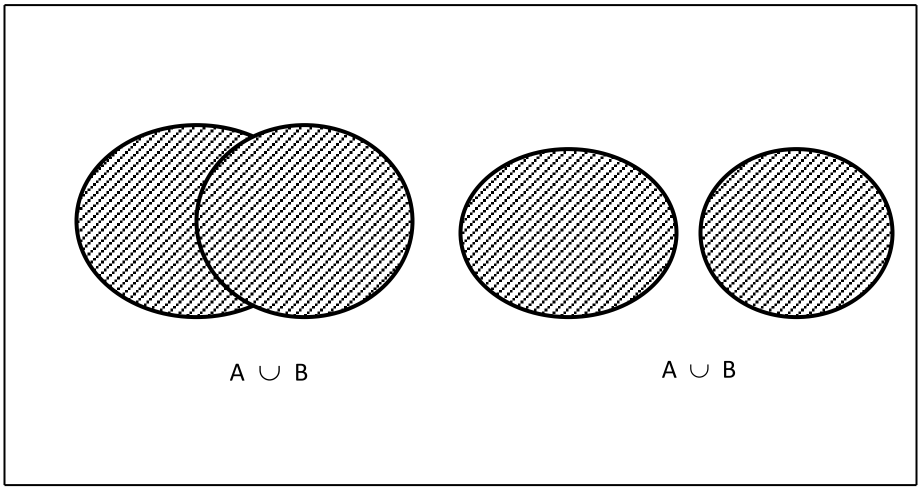


Figura 3.Gráfica de unión de dos conjuntos

Nota. El conjunto $A \cup B$ es el mínimo conjunto que contiene a los conjuntos A y B. Es decir, es evidente que $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, respectivamente.

Por ejemplo, si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 5. 7. 9, 11\}$ y tenemos que $\{1, 3, 5, 7, 9\} \subset \{1, 2, 3, 5. 7. 9, 11\}$ y $\{2, 3, 5, 7, 11\} \subset \{1, 2, 3, 5. 7. 9, 11\}$.

Proposición. Dados los conjuntos A, B y C, tenemos:

i) $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$.

ii) $A \subset C$ y $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$.

iii) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Demostración.

i) • $A \subset A \cup B$.

$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ (ley de adición)

$\Rightarrow\ x \in A \cup B$ (caracterización de la unión)

$\therefore\ A \subset A \cup B.$

- $B \subset A \cup B$. En forma análoga.

ii) $A \subset C$ y $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C.$

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ (definición de unión)

$\Rightarrow\ x \in C \vee x \in C$ (hipótesis)

$\Rightarrow\ x \in C$ (idempotencia)

$\therefore\ A \cup B \subset C.$

iii) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B.$

a) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B.$

Usando la igualdad de conjuntos, tenemos:

x es un elemento evaluador de $\mathbb{E}$,

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ (definición de unión)

$\Leftrightarrow\ x \in B \vee x \in B$ (hipótesis)

$\Leftrightarrow\ x \in B$

Como x es cualquiera, $(\forall x)\ (x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A \cup B = B.$

b) $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B.$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \qquad \text{(ley de adición)}$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B \qquad \text{(definición de unión)}$$

$$\Rightarrow x \in B \qquad \text{(por hipótesis)}$$

Luego, $A \subset B$.

Por tanto, de a) y b) se tiene que $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Ejemplo. Demostrar

$$X \subset A \wedge X \subset B \Rightarrow X \subset A \cup B$$

Demostración. En efecto, sea

$$x \in X \Rightarrow x \in A \vee x \in B \qquad \text{(por hipótesis)}$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B \qquad \text{(definición de unión)}$$

Ejemplo. Demostrar que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

Demostración.

$$X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \vee X \in \mathcal{P}(B) \qquad \text{(definición de unión)}$$

$$\Rightarrow X \subset A \vee X \subset B \qquad \text{(conjunto de partes)}$$

$$\Rightarrow X \subset A \cup B \qquad \text{(propiedad anterior)}$$

$$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

Ejercicio. ¿Es $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$?. Justifique su respuesta.

2.3 Intersección de Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Por el axioma de la unión existe un conjunto $\mathbb{E}$ tal que $A \subset \mathbb{E}$ y $B \subset \mathbb{E}$. Por el axioma de especificación existe un conjunto.

$\{x \in \mathbb{E} \,/\, P(x): x \in A \;\wedge\; x \in B\}$

Luego se define la intersección de los conjuntos A y B por

Definición.- Sean A y B dos conjuntos y sea $\mathbb{E}$ el conjunto dado por el axioma de la unión para la familia {A, B}. Se llama intersección de A y B al conjunto

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{E} \,/\, x \in A \;\wedge\; x \in B\}$$

Descripción gráfica:

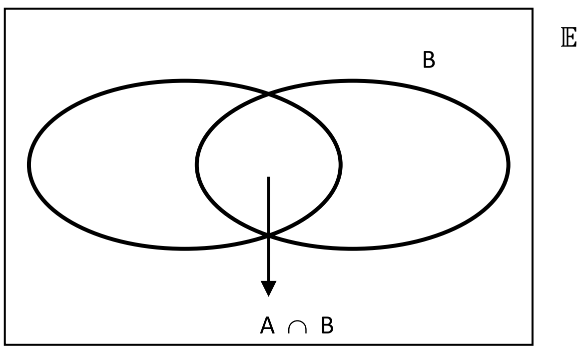


Figura 4. Gráfica de intersección dos de conjuntos

Afirmar que $x \in A \cap B$ significa que se tiene al mismo tiempo: $x \in A$ y $x \in B$, por lo que podemos caracterizar:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \;\wedge\; x \in B$$

o en forma equivalente

$$x \notin A \cap B \iff x \notin A \;\vee\; x \notin B$$

Por ejemplo, si A = {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8} y B = {0, 1, 2, 4, 7, 9}, entonces $A \cap B$ = {1, 4, 7}

Nota. Es evidente que cualesquiera que sean los conjuntos A y B, se tiene:

$$A \cap B \subset A \quad \wedge \quad A \cap B \subset B$$

En efecto, en el ejercicio anterior tenemos que

$$\{1, 4, 7\} \subset \{1, 3, 4, 5, 7, 8\} \text{ y } \{1, 4, 7\} \subset \{0, 1, 2, 4, 7, 9\}$$

Proposición. Dados los conjuntos A, B y C, tenemos:

i) $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$.

ii) $A \subset C$ y $B \subset C \Rightarrow A \cap B \subset C$.

iii) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Demostración.

i) • $A \cap B \subset A$.

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ (definición de intersección)

$\Rightarrow x \in A$ (ley de simplificación)

Por tanto, $A \cap B \subset A$.

• $A \cap B \subset B$. En forma análoga.

ii) $A \subset C$ y $B \subset C \Rightarrow A \cap B \subset C$.

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ (por la propiedad de la intersección)

$\Rightarrow x \in C \wedge x \in C$ (hipótesis)

$\Rightarrow x \in C$ (idempotencia)

Por tanto, $A \cap B \subset C$.

iii) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

a) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$.

Usando caracterización de la igualdad, probaremos: $A \cap B \subset A$ y $A \subset A \cap B$.

$A \cap B \subset A$.

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$ (definición de intersección)

$\Rightarrow x \in A$ (ley de simplificación)

Por tanto, $A \cap B \subset A$.

$A \subset A \cap B$.

Supongamos, por el absurdo, que $A \not\subset A \cap B$. Entonces,

$\exists\, x / x \in A \wedge x \notin A \cap B$. Luego,

$x \in A \wedge x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$

$\Rightarrow F \vee (x \in A \wedge x \notin B)$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$

$\Rightarrow x \in B \wedge x \notin B$ $(\rightarrow\leftarrow)$ (hipótesis)

Por tanto, la suposición es falsa y se acepta que $A \subset A \cap B$.

Entonces, se concluye que $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$.

b) $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$.

$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$ (por hipótesis)

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ (definición de intersección)

$\Rightarrow x \in B$ (ley de simplificación)

iv) Por tanto, de *a*) y *b*) se tiene $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Ejemplo. Demostrar: $X \subset A \wedge X \subset B \Leftrightarrow X \subset A \cap B$

Solución.

a) $(\Rightarrow)$ $X \subset A \wedge X \subset B \Rightarrow X \subset A \cap B$.

$x \in X \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ (por hipótesis)

$\Rightarrow x \in A \cap B$ (definición de intersección)

b) $(\Leftarrow)$ $X \subset A \cap B \Rightarrow X \subset A \wedge X \subset B$.

Sea x un elemento cualesquiera. Entonces,

$$x \in X \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Luego,

$x \in X \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \equiv x \notin X \vee (x \in A \wedge x \in B)$

$\equiv (x \notin X \vee x \in A) \wedge (x \notin X \vee x \in B)$

$\equiv (x \in X \Rightarrow x \in A) \wedge (x \in X \Rightarrow x \in B)$

Como x es cualquiera, concluimos que

$$(\forall\, x)\,[(x \in X \;\Rightarrow\; x \in A) \;\wedge\; (x \in X \;\Rightarrow\; x \in B)]$$

Es decir, $(\forall\, x)\,(x \in X \;\Rightarrow\; x \in A) \;\wedge\; (\forall\, x)\,(x \in X \;\Rightarrow\; x \in B)$

y, por tanto, $X \subset A \;\wedge\; X \subset B$.

Ejemplo. Demostrar los siguiente ejemplos:

$$P\,(A \cap B) = P\,(A) \cap P\,(B)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} X \in P\,(A) \cap P\,(B) &\Leftrightarrow X \in P\,(A) \;\wedge\; X \in P\,(B) \\ &\Leftrightarrow X \subset A \;\wedge\; X \subset B \\ &\Leftrightarrow X \subset A \cap B \\ &\Leftrightarrow X \in P\,(A \cap B) \end{aligned}$$

Conjuntos disjuntos

Cuando ocurre que no existe algún x tal que $x \in A$ y $x \in B$ se tiene $A \cap B = \phi$, entonces estamos hablando de conjunto disjunto.

Definición.- Dos conjuntos A y B se dicen disjuntos si su intersección es el conjunto vacío. Es decir,

A y B son disjuntos $\Leftrightarrow A \cap B = \phi$

Por ejemplo, si $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 2 < x < 7\}$ entonces A y B son conjuntos disjuntos. En efecto, $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $A \cap B = \{ x \in \mathbb{N} / 2 < x < 3\} = \phi$. Pues, no existen números naturales x tales que $2 < x < 3$. Por tanto se dice que los conjuntos A y B son disjuntos.

En particular, el conjunto vacío es disjunto con cualquier conjunto.

Leyes del álgebra de conjuntos

En vista que la unión de conjuntos está definida mediante la disyunción de proposiciones, entonces las propiedades de la disyunción darán lugar a las propiedades de la unión. Análogamente, como la intersección de conjuntos está definida en términos de la conjunción de proposiciones, las propiedades de la intersección estarán relacionadas con las propiedades de la conjunción.

Las operaciones de unión e intersección con conjuntos, definidas anteriormente, satisfacen varias leyes, propiedades o identidades. Tenemos las siguientes:

a) **Leyes Idempotentes**

Necesitaremos de un conjunto y un conjunto referencial para verificar

i) $A \cup A = A$

ii) $A \cap A = A$

Demostración.

i) $A \cup A = A$

x es un elemento evaluador de $\mathbb{E}$. Consecuencia.

$$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \quad \text{(definición de unión)}$$

$$\Leftrightarrow x \in A \quad \text{(idempotencia de } \vee\text{)}$$

De la arbitrariedad de x se sigue que

$$(\forall x)\,(x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A)$$

y, por tanto, $A \cup A = A$.

ii) Análogamente se prueba que $A \cap A = A$.

***b*) Leyes Conmutativas**

Ay B son dos conjuntos y e un conjunto evaluador: se comprueba

i) $A \cup B = B \cup A$

ii) $A \cap B = B \cap A$

Demostración.

i) $A \cup B = B \cup A$

Sea x cualquier elemento de $\mathbb{E}$. Entonces,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \quad \text{(definición de unión)}$$

$$\Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \quad \text{(conmutatividad de } \vee\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x \in B \cup A \quad \text{(definición de unión)}$$

Como x es cualquiera de $\mathbb{E}$, se sigue que

$$(\forall\, x)\ (x \in A \cup B \iff x \in B \cup A)$$

por lo tanto, $A \cap B = B \cap A$.

***c*) Leyes Asociativas**

A, B y C son conjuntos de un referencial evaluador de $\mathbb{E}$, se comprueba:

i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Demostración.

i) x es un elemento evaluador de $\mathbb{E}$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\iff x \in A \ \lor\ x \in (B \cup C) && \text{(definición de unión)} \\ &\iff x \in A \ \lor\ (x \in B \lor x \in C) && \text{(definición de unión)} \\ &\iff (x \in A \lor x \in B) \ \lor\ x \in C) && \text{(asociatividad de } \lor) \\ &\iff x \in A \cup B \ \lor\ x \in C && \text{(definición de unión)} \\ &\iff x \in (A \cup B) \cup C && \text{(definición de unión)} \end{aligned}$$

De la evaluación de x se sigue que

$$(\forall\, x)\ [x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in (A \cup B) \cup C]$$

de aquí que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

ii) Análogamente se demuestra que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

***d*) Leyes Distributivas**

A, B y C son conjuntos referencial de $\mathbb{E}$, se verifica

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración.

i) x es cualquier elemento del conjunto referencial $\mathbb{E}$, entonces,

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$ (definición de unión)

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$ (def. de intersección)

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$ (distributividad)

$\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$ (definición de unión)

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (def. de intersección)

X es cualquier elemento de $\mathbb{E}$, se sigue que

$(\forall x) [(x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)]$

Conclusión, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

ii) Análogamente se comprueba $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

***e*) Leyes de Identidad y Leyes de Dominación**

A es conjunto de un referencial evaluador de $\mathbb{E}$, se verifica:

i) $A \cup \phi = A$

ii) $A \cup \mathbb{E} = \mathbb{E}$

iii) $A \cap \phi = \phi$

vi) $A \cap \mathbb{E} = A$

Demostración.

i) $A \cup \phi = A$. x es un elemento evaluador de $\mathbb{E}$. Entonces,

$x \in A \cup \phi \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \phi$ (definición de unión)

$\Leftrightarrow x \in A$ ($x \in \phi$ es falso siempre)

Luego, $(\forall x)(x \in A \cup \phi \Leftrightarrow x \in A)$

es decir, $A \cup \phi = A$.

iii) $A \cap \phi = \phi$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $A \cap \phi \neq \phi$. Entonces,

$\exists x \in \mathbb{E}$ tal que $x \in A \cap \phi \wedge x \notin \phi$. Luego,

$x \in A \cap \phi \wedge x \notin \phi \Rightarrow x \in A \cap \phi$ (ley de simplificación)

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in \phi$ (definición de intersección)

$\Rightarrow x \in \phi$ $(\rightarrow\leftarrow)$ (ley de simplificación)

Contradice a que el conjunto vacío no tiene elementos. Por tanto, la suposición es falsa, y aceptamos que $A \cap \phi = \phi$.

ii) y *vi*) quedan como ejercicio.

Notas:

1) La propiedad asociativa, demostrada líneas arriba, nos permite escribir la unión e intersección de tres conjuntos A, B y C

$A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$

sin caer en ambigüedades.

2) La demostración de las propiedades anteriores, y las que daremos más adelante, se reducen al manejo adecuado de los conectivos lógicos $\vee$ y $\wedge$, y de las leyes lógicas e inferencias.

Proposición.

Dados los conjuntos A, B y C de un referencial $\mathbb{E}$, se verifica

Si $A \subset B$ y $C \subset D$, entonces $A \cap C \subset B \cap D$

Demostración. Probaremos que $A \subset B$ y $C \subset D \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D$

En efecto, sea un x cualquiera de $\mathbb{E}$. Entonces,

$$x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \quad \text{(definición de intersección)}$$

$$\Rightarrow x \in B \wedge x \in D \quad \text{(por hipótesis)}$$

$$\Rightarrow x \in B \cap D \quad \text{(definición de intersección)}$$

Como x es cualquiera de $\mathbb{E}$, se sigue que

$$(\forall\, x)\,(x \in A \cap C \;\Rightarrow\; x \in B \cap D)$$

por lo tanto, $A \cap C \subset B \cap D$.

Ejemplo. Demostrar

$A \cap B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \vee B = \phi$

Demostración.

a) ($\Rightarrow$) $A \cap B = \phi \Rightarrow A = \phi \vee B = \phi$.

Supongamos, por el absurdo que $\sim (A = \phi \vee B = \phi)$. Es decir, $A \neq \phi \wedge B \neq \phi$.

Entonces, existe un x de $\mathbb{E}$, talque $x \in A \wedge x \in B$. Luego,

$$x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \quad (\rightarrow\leftarrow) \quad (\text{definición de } \cap)$$

Contradice a la hipótesis, pues $A \cap B = \phi$. Por tanto la suposición es falsa, y aceptamos que $A = \phi \vee B = \phi$.

b) ($\Leftarrow$) $A = \phi \vee B = \phi \Rightarrow A \cap B = \phi$.

Por el contrarrecíproco probaremos que $A \cap B \neq \phi \Rightarrow A \neq \phi \wedge B \neq \phi$.

En efecto,

$$A \cap B \neq \phi \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{E} \,/\, x \in A \cap B$$

$$\Rightarrow \exists\, x \,/\, x \in A \wedge x \in B \quad (\text{definición de intersección})$$

$$\Rightarrow A \neq \phi \wedge B \neq \phi$$

Luego, $A \neq \phi \wedge B \neq \phi \equiv \sim(A = \phi \vee B = \phi)$, contradice a la hipótesis.

Entonces,

$$A = \phi \vee B = \phi \Rightarrow A \cap B = \phi.$$

Por tanto de *a*) y *b*), se tiene $A \cap B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \vee B = \phi$.

Ejemplo. Probar que: $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

Demostración. Por el teorema de la igualdad demostraremos que $A \subset B$ y $B \subset A$. En efecto,

a) $A \subset B$.

Sea x un elemento cualquiera. Entonces,

$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ (ley de adición)

$\Rightarrow x \in A \cup B$ (definición de unión)

$\Rightarrow x \in A \cap B$ (por hipótesis)

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ (definición de intersección)

$\Rightarrow x \in B$ (ley de simplificación)

Como x es cualquiera, se sigue que

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

por lo tanto, $A \subset B$.

b) De una forma similar se demuestra que $B \subset A$.

Por tanto, de *a*) y *b*) se concluye que A = B.

2.4 Diferencia de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Por el axioma de la unión existe un conjunto $\mathbb{E}$ (conjunto referencial o universal) tal que $A \subset \mathbb{E}$ y $B \subset \mathbb{E}$. Por el axioma de especificación existe un conjunto

$$\{x \in \mathbb{E} \,/\, P(x): x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$$

Definición.- Sean A y B dos subconjuntos y $\mathbb{E}$ el conjunto dado por el axioma de la unión para la familia {A, B}. Definimos la diferencia de A con B, denotada A – B, como el conjunto tal que

$$A - B = \{x \in \mathbb{E} \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

Descripción gráfica:

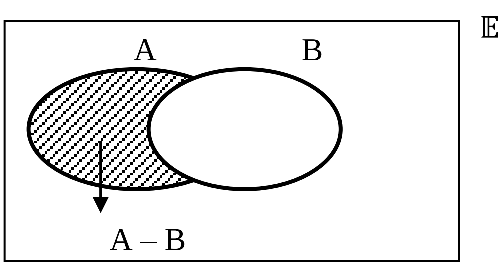


Figura 5. Gráfica de diferencia de dos conjuntos

Es decir, la diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto A – B de modo que sus elementos son todos los de $\mathbb{E}$ tales que pertenecen a A y no pertenecen a B.

Los elementos de A – B, los caracterizamos por

$$x \in A - B \;\Leftrightarrow\; x \in A \;\wedge\; x \notin B$$

O, en forma equivalente , $x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$

Cuando A y B son disjuntos, ningún elemento de A pertenece a B y por tanto A – B = A. En cualquier caso se tiene:

$A - B = A - (A \cap B)$

Nótese que $A - B \neq B - A$. Por tanto el orden en que se enuncian los conjuntos es muy importante, pues la diferencia de conjuntos no es conmutativa. Por otro lado, la diferencia de conjuntos no es idempotente, es decir, $A - A \neq A$.

Por ejemplo, si $A = \{0, 2, 3, 5, 8, 9\}$ y $B = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$, entonces

$A - B = \{0, 2, 9\}$ y $B - A = \{1, 6, 10\}$

Proposición.

Sean A, B y C subconjuntos arbitrarios de un conjunto referencial $\mathbb{E}$. Entonces la diferencia de conjuntos verifica:

a) $A - A = \phi$.

b) $A - \phi = A$.

c) $A - B = A - (A \cap B)$.

d) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

e) $A - B \subset A$.

f) $B \cap (A - B) = \phi$.

g) $A - B = (A \cup B) - B$.

h) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

Demostración. Probaremos *b),* *d)* y *f).* Las demás, quedan como ejercicio.

b) $A - \phi = A$.

Sea, $x \in A - \phi \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin \phi$ (definición de diferencia)

$\Leftrightarrow x \in A$ ($x \notin \phi$ es verdadero siempre)

Como x es arbitrario, se sigue que

$(\forall x)(x \in A - \phi \Leftrightarrow x \in A)$

por lo tanto, $A - \phi = A$.

d) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

Sea x un elemento cualquiera de $\mathbb{E}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cap B) - (A \cap C) &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C) \\
&\Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin A] \vee [(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C] \\
&\Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \notin A) \wedge x \in B)] \vee [x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C] \\
&\Leftrightarrow (F \wedge x \in B) \vee [x \in A \wedge x \in (B - C)] \\
&\Leftrightarrow F \vee [x \in A \wedge x \in (B - C)] \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B - C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap (B - C)
\end{aligned}
$$

Luego,

$$(\forall\ x)\ [x \in (A \cap B) - (A \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap (B - C)]$$

por lo tanto, $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

Observación. En la demostración anterior, *F* es una contradicción.

f) $B \cap (A - B) = \phi$.

Supongamos, por el absurdo, que $B \cap (A - B) \neq \phi$. Entonces, $\exists\ x \in \mathbb{E}$ tal que

$$\begin{aligned}
x \in B \cap (A - B) &\Rightarrow x \in B \wedge x \in A - B && \text{(def. de intersección)}\\
&\Rightarrow x \in B \wedge (x \in A \wedge x \notin B) && \text{(def. de diferencia)}\\
&\Rightarrow x \in B \wedge (x \notin B \wedge x \in A) && \text{(conmutatividad)}\\
&\Rightarrow (x \in B \wedge x \notin B) \wedge x \in A && \text{(asociatividad)}\\
&\Rightarrow x \in B \wedge x \notin B \ (\rightarrow\leftarrow) && \text{(ley de simplificación)}
\end{aligned}$$

Por tanto, la suposición es falsa, y se acepta que $B \cap (A - B) = \phi$.

Proposición.

Dados A y B subconjuntos cualesquiera de un conjunto referencial $\mathbb{E}$. Entonces,

$$A \subset B \Leftrightarrow A - B = \phi$$

Demostración. En efecto,

a) $(\Rightarrow)$ $A \subset B \Rightarrow A - B = \phi$.

Supongamos, por el absurdo, que $A - B \neq \phi$. Entonces,

$$\exists\, x \in \mathbb{E} \,/\, x \in A - B. \text{ Luego,}$$

$$x \in A - B \iff x \in A \wedge x \notin B \qquad \text{(definición de diferencia)}$$

$$\Rightarrow x \in B \wedge x \notin B \ (\rightarrow\leftarrow) \ \text{(por hipótesis)}$$

Por tanto, la suposición es falsa, y aceptamos que $A - B = \phi$.

b) $(\Leftarrow)$ $A - B = \phi \Rightarrow A \subset B$.

Supongamos, por el absurdo, que $A \not\subset B$. Entonces,

$\exists\, x \in \mathbb{E} \,/\, x \in A \wedge x \notin B$. Luego,

$$x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A - B \qquad \text{(definición de diferencia)}$$

$$\Rightarrow A - B \neq \phi \ (\rightarrow\leftarrow)$$

Contradice a que, por hipótesis, $A - B = \phi$. Por tanto la suposición es falsa, y aceptamos que $A \subset B$.

Luego, de *a*) y *b*) $A \subset B \iff A - B = \phi$.

Ejemplo. Mediante un contraejemplo, probar que no siempre se cumple que

$$A - (B - C) = (A - B) - C$$

Es decir, en general, la diferencia de conjuntos no es asociativa

Solución. Supongamos que $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, $C \neq \phi$, $A \subset B$ y $B \subset C$. Entonces,

- $A - (B - C) = A - \phi = A$
- $(A - B) - C = \phi - C = \phi$

Por tanto, $A - (B - C) \neq (A - B) - C$.

Ejemplo. Probar que $(A - B) - C \subset A - (B - C)$.

Solución. Sea x es un elemento cualquiera. Entonces,

$$x \in (A - B) - C \Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \notin C \qquad \text{(definición de diferencia)}$$

$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \qquad \text{(definición de diferencia)}$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \qquad \text{(asociatividad de } \wedge\text{)}$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge \sim(x \in B \wedge x \notin C)$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge \sim(x \in B - C) \qquad \text{(definición de diferencia)}$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B - C)$$

$$\Rightarrow x \in A - (B - C) \qquad \text{(definición de diferencia)}$$

Como x es cualquiera, se sigue que

$$(\forall x)\,[x \in (A - B) - C \Rightarrow x \in A - (B - C)]$$

de aquí que $(A - B) - C \subset A - (B - C)$.

Nota. $(*)$: $p \wedge (\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow p \wedge (\sim q \vee r)$.

Ejemplo. Probar que $A \subset B \Rightarrow A - (A - B) = A$.

Solución. Como $A \subset B$, por la proposición anterior, se sigue que $A - B = \phi$. Entonces,

$$A - (A - B) = A - \phi = A$$

Ejemplo. Probar, mediante un contraejemplo, que la unión no es distributiva respecto de la diferencia. Es decir, no se cumple que

$$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$$

Solución. Supongamos que $A \neq \phi$ y $B = C$. Entonces,

- $A \cup (B - C) = A \cup (B - B) = A \cup \phi = A$.
- $(A \cup B) - (A \cup C) = (A \cup B) - (A \cup B) = \phi$.

Por tanto, $A = \phi$ es falso ya que $A \neq \phi$.

2.5 Complemento de un Conjunto

Cuando se ha definido $A - B$ no se ha requerido que A esté incluido en B. Entonces, si $A \subset B$, a la diferencia $B - A$ se le llama complemento de A respecto de B y se denota por $C_B A$.

Definición.- Sea $A \subset B \subset \mathbb{E}$. El conjunto diferencia $B - A$ se le llama "complemento de A con respecto a B" y se denota con $C_B A$. Entonces, $C_B A = B - A$

Descripción gráfica:

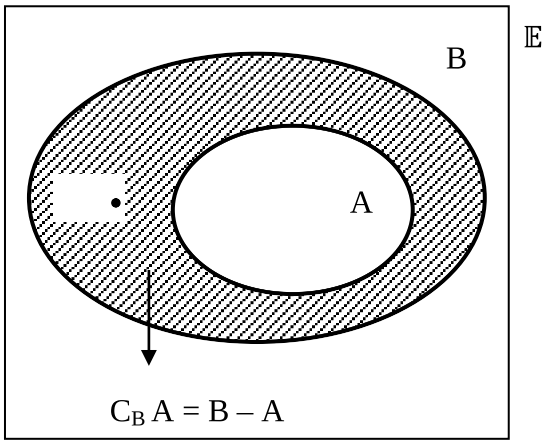


Figura 6. Gráfica del complemento de A respecto de B

Caracterización: $x \in C_B A \Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$.

O en forma equivalente: $x \notin C_B A \Leftrightarrow x \notin B \vee x \in A$.

Por ejemplo, si $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{0, 4, 6\}$ y $C = \{1, 8\}$, entonces:

- $C_B A = B - A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

- $C_B C$, no está definido, pues $C \not\subset B$.

En la definición anterior, si $B = \mathbb{E}$ la diferencia $\mathbb{E} - A$, donde $\mathbb{E}$ es el conjunto dado por el axioma de la unión, se le llama el complemento de A. En lugar de leer "el complemento de A con respecto a $\mathbb{E}$, se lee simplemente "complemento de A" si no hay lugar a confusión. Se denota por C A, A^c o A'. Entonces,

$C\,A = \{x \in \mathbb{E} / x \notin A\} = A^c$

Caracterización: $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$.

En forma equivalente: $x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$.

Entonces, el complemento de un conjunto A es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto referencial que no pertenecen a A. Es decir, el complemento de A, es igual a la diferencia entre $\mathbb{E}$ y A. O sea, $A^c = \mathbb{E} - A$.

Descripción gráfica:

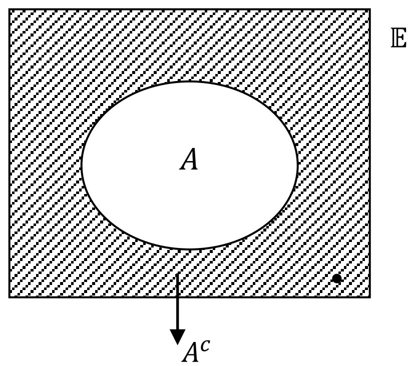


Figura 7. Gráfica del complemento de un conjunto

Por ejemplo, en particular, si $\mathbb{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, entonces

$A^c = \{0, 2, 4, 8\}$

Es decir, el complemento de A es el conjunto formado por los elementos de $\mathbb{E}$ que no están A; o sea los elementos que le faltan a A para ser igual a $\mathbb{E}$.

Proposición. Dados tres conjuntos A, B y C en un referencial $\mathbb{E}$, se verifican:

a) $A - B = A \cap B^c$.

b) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

c) $(A^c)^c = A$.

Demostración.

a) $A - B = A \cap B^c$

Sea *x* un elemento arbitrario de $\mathbb{E}$. Entonces,

$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ (definición de diferencia)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c$ (definición de complemento)

$\Leftrightarrow x \in A \cap B^c$ (definición de intersección)

De la arbitrariedad de *x* se sigue que

$(\forall x)\,(x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \cap B^c)$

Por lo tanto, $A - B = A \cap B^c$.

b) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

Sea *x* un elemento cualquiera. Entonces,

1) $(\Rightarrow)$ $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.

$x \in B^c \Rightarrow x \notin B$ (definición de complemento)

$\Rightarrow x \notin A$ (por hipótesis)

$\Rightarrow x \in A^c$ (definición de complemento)

Luego, $(\exists x)(\, x \in B^c \Rightarrow x \in A^c)$. Por lo tanto, $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.

2) $(\Leftarrow)$ $B^c \subset A^c \Rightarrow A \subset B$.

$x \in A \Rightarrow x \notin A^c$ (negación de definición de complemento)

$\Rightarrow x \notin B^c$ (por hipótesis)

$\Rightarrow x \in B$ (negación de definición de complemento)

Luego, $(\exists x)(\ x \in A \Rightarrow x \in B)$. Por lo tanto, $A \subset B$.

De 1) y 2) se concluye que $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

c) $(A^c)^c = A$.

Sea x un elemento cualquiera de $\mathbb{E}$. Entonces,

$x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c$ (definición de complemento)

$\Leftrightarrow \sim(x \in A^c)$ (negación)

$\Leftrightarrow \sim(x \notin A)$ (definición de complemento)

$\Leftrightarrow \sim\sim(x \in A)$ (negación)

$\Leftrightarrow x \in A$ (doble negación)

Luego, $(\forall x)[x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \in A]$. Es decir, $(A^c)^c = A$.

Leyes del Complemento

Dado un conjunto cualquiera A de un referencial arbitrario $\mathbb{E}$, se verifica:

a) $A \cup A^c = \mathbb{E}$.

b) $\mathbb{E}^c = \phi$.

c) $A \cap A^c = \phi$.

d) $\phi^c = \mathbb{E}$.

Demostración.

a) $A \cup A^c = \mathbb{E}$.

Sea x cualquier elemento de $\mathbb{E}$. Entonces,

$x \in A \cup A^c \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A^c$ (definición de unión)

$\Leftrightarrow$ x $\in A \vee$ x $\notin A^c$ (definición de complemento)

$\Leftrightarrow$ x $\in A \vee \sim$(x $\in A^c$) (negación)

$\Leftrightarrow$ x $\in \mathbb{E}$ (tautología)

Luego, $(\forall$ x)(x $\in A \cup A^c \Leftrightarrow$ x $\in \mathbb{E}$)

por tanto, $A \cup A^c = \mathbb{E}$.

b) $\mathbb{E}^c = \phi$. En efecto,

$$\mathbb{E}^c = \{x \in \mathbb{E} \,/\, x \in \mathbb{E}^c\} = \{x \in \mathbb{E} \wedge x \notin \mathbb{E}\} = \phi$$

c) $A \cap A^c = \phi$. En efecto,

$$A \cap A^c = \{x \in \mathbb{E} \,/\, x \in A \wedge x \in A^c\} = \{ x \in \mathbb{E} \,/\, x \in A \wedge x \notin A\} = \phi$$

d) $\phi^c = \mathbb{E}$. (Ejercicio)

Leyes de Morgan

Dados dos conjuntos A y B en un referencial $\mathbb{E}$, se verifica:

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Demostración.

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Sea x un elemento cualquiera de $\mathbb{E}$. Entonces,

x $\in (A \cup B)^c \Leftrightarrow$ x $\notin A \cup B$ (definición de complemento)

$\Leftrightarrow \sim$(x $\in A \cup B$) (negación)

$\Leftrightarrow \sim$(x $\in A \vee$ x $\in B$) (definición de unión)

$\Leftrightarrow \sim$(x $\in A$) $\wedge \sim$(x $\in B$) (De Morgan para $\vee$)

$\Leftrightarrow$ x $\notin A$ $\wedge$ x $\notin B$ (negación)

$\Leftrightarrow$ x $\in A^c$ $\wedge$ x $\in B^c$ (definición de complemento)

$\Leftrightarrow$ x $\in A^c \cap B^c$ (definición de intersección)

y al ser x un elemento cualquiera de $\mathbb{E}$, se sigue que

$$(\forall\ x)[\ x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c]$$

luego, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

b) Análogamente se prueba que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Ejemplo. Demostrar que $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

Demostración. Sea x un elemento arbitrario de un referencial $\mathbb{E}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
x \in A - (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup B)^c \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \cap C^c \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \wedge (x \in B^c \wedge x \in C^c) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B^c) \wedge (x \in A \wedge x \in C^c) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \in (A - C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)
\end{aligned}$$

Por ser x un elemento arbitrario, se sigue que

$$(\forall x)([x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)].$$

luego, $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

Otra forma:

$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c)$ (propiedad: $A - B = A \cap B^c$)

$= (A \cap A) \cap (B^c \cap C^c)$ (ley asociativa)

$= A \cap (B^c \cap C^c)$ (ley de idempotencia)

$= A \cap (B \cup C)^c$ (Ley de De Morgan)

$= A - (B \cup C)$ (propiedad: $A - B = A \cap B^c$)

Ejemplo. Demostrar que $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Demostración.

$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c$ (propiedad: $A - B = A \cap B^c$)

$= A \cap (B^c \cup C^c)$ (ley de De Morgan)

$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$ (ley distributiva)

$= (A - B) \cup (A - C)$ (propiedad anterior)

Por tanto, $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Ejemplo. Demostrar que si $C \subset A$, entonces $A - (B - C) = (A - B) \cup C$.

Demostración.

$$A - (B - C) = A \cap (B \cap C^c)^c \qquad \text{(propiedad)}$$

$$= A \cap (B^c \cup c) \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \qquad \text{(distributividad)}$$

$$= (A - B) \cup A \qquad \text{(propiedad e hipótesis)}$$

Ejemplo. Probar que, $A \subset B \Leftrightarrow (B - A) \cup A = B$

Prueba.

$i)$ $(\Rightarrow)$ $A \subset B \Rightarrow (B - A) \cup A = B$

$$(B - A) \cup A = (B \cap A^c) \cup A$$

$$= (B \cup A) \cap (A^c \cup A)$$

$$= (B \cup A) \cap \mathbb{E}$$

$$= B \cup A$$

$$= B$$

$ii)$ $(\Leftarrow)$ $(B - A) \cup A = B \Rightarrow A \subset B.$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in (B - A) \qquad \text{(ley de adición)}$$

$$\Rightarrow x \in A \cup (B - A) \qquad \text{(definición de unión)}$$

$$\Rightarrow x \in (B - A) \cup A, \qquad \text{(ley conmutativa de la } \cup\text{)}$$

$$\Rightarrow x \in B \qquad \text{(de la hipótesis)}$$

Por tanto, de *i*) y *ii*) queda probada la propiedad.

Ejemplo. Probar que $A \cup B = C \wedge A \cap B = \phi \Rightarrow A = C - B$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
C - B &= (A \cup B) - B \quad \text{(de la hipótesis)}\\
&= (A - B) \cup (B - B) \quad \text{(propiedad)}\\
&= (A - B) \cup \phi \quad \text{(propiedad)}\\
&= A - B \quad \text{(ley del elemento identidad)}\\
&= A \quad \text{(de la hipótesis, A y B son disjuntos)}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $A = C - B$.

2.6 Diferencia Simétrica

Otro caso particular de diferencia de conjuntos es la llamada diferencia simétrica. Por ejemplo, dados los conjuntos:

$A = \{a, c, d, f, g, i, l\}$ y $B = \{a, b, e, f, h, i, m\}$

entonces, $A - B = \{c, d, g, l\}$ y $B - A = \{b, e, h, m\}$. Si reunimos estos dos resultados, obtenemos el conjunto $\{b, c, d, e, g, h, l, m\}$. A este conjunto resultante se le llama la diferencia simétrica de A y B, y se denota por $A \,\Delta\, B$.

Definición.- Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{E}$. La diferencia simétrica de A y B es el conjunto $A \,\Delta\, B$, dado por

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Se prueba que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$; llamada unión disjunta de $(A - B)$ y $(B - A)$.

De acuerdo a la ley de la disyunción exclusiva, $p \veebar q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} x \in A \veebar x \in B &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \vee x \in (B - A) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (B - A) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \Delta B) \end{aligned}$$

Por tanto, definimos:

$$A \Delta B = \{x \in \mathbb{E} \,/\, x \in A \veebar x \in B\}$$

Caracterización: $x \in (A \Delta B) \Leftrightarrow x \in A \veebar x \in B$

Entonces, la diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B pero no a ambos.

Proposición. Sean A, B y C subconjuntos de $\mathbb{E}$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

a) Conmutatividad: $A \Delta B = B \Delta A$.

b) Asociatividad: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

c) $A \Delta \phi = A$.

d) $A \Delta A = \phi$.

e) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Demostración.

a) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ (definición de diferencia simétrica)

$= (B \cup A) - (B \cap A)$ (ley conmutativa)

$= B \Delta A$ (definición de diferencia simétrica)

c) $A \Delta \phi = (A \cup \phi) - (A \cap \phi)$ (definición de diferencia simétrica)

$= A - \phi$ (ley de identidad y ley de dominación)

$= A$ (propiedad)

d) $A \cap (B \Delta C) = A \cap [(B \cup C) - (B \cap C)]$

$= [A \cap (B \cup C)] - [A \cap (B \cap C)]$

$= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] - [(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$= (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Ejemplo. Probar que para todo conjunto A, se verifica $A \Delta \mathbb{E} = A^c$.

Prueba. En efecto,

$$A - \mathbb{E} = (A - \mathbb{E}) \cup (\mathbb{E} - A)$$

$$= \emptyset \cup (\mathbb{E} - A)$$

$$= \mathbb{E} - A$$

$$= A^c$$

Ejercicios Propuestos

1. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $A \cup A^c$ *b*) $B \cup (A \cap B)^c$ *c*) $(A \cup B) \cup B^c$

d) $A \cup \mathbb{E}$ *e*) $A \cap (B \cup B^c)$ *f*) $A \cap (B \cap B^c)$

2. Demostrar:

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B^c = \phi$

a. $B^c \subset A^c \Leftrightarrow B^c \cap A = \phi$

3. Sean A,B y C tres conjuntos tales que $A \cap B = A \cap C$ y $A \cup B = A \cup C$.Probar que: $B = C$

4. Probar las identidades siguientes:

a) $A \cup (A \cap B) = A$.

b) $A \cup (A^c \cap B) = A$

c) $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$

d) $A \cup (B - A) = A \cup B$

5. Probar que:

a) $A \cup B = C \wedge A \cap B = \phi \Rightarrow A = C - B$

b) $A \cup B = \mathbb{E} \wedge A \cap B = \phi \Rightarrow A = B^c$

c) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

d) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = \mathbb{E} \Leftrightarrow A = B$

e) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

6. Demostrar que:

a) $A \Delta B \subset A \cup B$

b) $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \phi$

c) $A \Delta A^c = \mathbb{E}$

d) $A \Delta B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \phi$

e) $A \cap B = (A \cup B) - (A \Delta B)$

f) $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$

7. Probar que $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$.

8. Probar $A \subset B \Leftrightarrow B \cup A^c = \mathbb{E}$.

9. Demostrar que

$[(A \cap B^c)^c - (A \cup B)^c] \cup (A \cap B) = B$

10. Usando propiedades de conjuntos, verificar si:

a) $(A - B) \cup (A - B^c) = A$

b) $B \cap [(B^c \cup A^c) \cup (A \cup B)^c] = B - A$

c) $A - \{A - [(A - B) \cup A]\} = A$

d) $[A - (A \cap B)] \cup [B - (A \cap B)] = \phi$

11. Determine la validez de las siguientes afirmaciones:

a) Si $A \cup B = A \cup C$, entonces $B = C$.

b) Si $A \cap B = A \cap C$, entonces $B = C$.

c) Si $A \Delta B = A \Delta C$, entonces $B = C$.

12. Sean *A*, *B* y *C* subconjuntos de $\mathbb{E}$, y dado el conjunto

$$D = [(A^c \cap B)^c \cap C] \cup (A \cap B \cap C)$$

Simplificar en *D* y verificar cuál de las afirmaciones es verdadera.

a) $D = A$

b) $D = A \cap B$

c) $D = A \cup B$

2.7 Producto Cartesiano de Conjuntos

Llamaremos *n*-tupla ordenada a una sucesión de *n* objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dados en un cierto orden y lo notaremos por $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Es fundamental el orden en que escribimos los elementos de la *n*-tupla, así

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (a_2, a_1, \ldots, a_n)$$

Si $n = 2$, una *n*-tupla se llama “par ordenada” y si $n = 3$, “terna ordenada”, etc.

Par Ordenado

Definición.- Sean los conjuntos $A \subset \mathbb{E}$ y $B \subset \mathbb{E}$, tal que $x \in A$, $y \in B$. Se llama par ordenado de componentes x e y, y se denota (x, y), al conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Es decir,

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

A los elementos del par se les llama:

x: primera componente o primera proyección.

y: segunda componente o segunda proyección.

Observación. $(x, y) \in P(P(A \cup B))$.

La propiedad fundamental de los pares ordenados es la siguiente.

Teorema.

$(x, y) = (w, z) \Leftrightarrow x = w \wedge y = z.$

Demostración. Probaremos lo siguiente:

i) $(x, y) = (w, z) \Rightarrow x = w \wedge y = z$

$$(x, y) = (w, z) \Rightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{w\}, \{w, z\}\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Tenemos los siguientes casos:

a) Si x = y.

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$$

Luego, en (∗): $\{\{w\}, \{w, z\}\} = \{\{x\}\} \Rightarrow \{w\} = \{w, z\} \wedge \{w\} = \{x\}$

$\Rightarrow w = z \wedge w = x$ (por ser {w} unitario)

Entonces, se tiene:

$x = y \wedge w = z \wedge w = x \Rightarrow x = y = w = z$

$\Rightarrow x = w \wedge y = z.$

b) Si $x \neq y$.

En $\{\{w\}, \{w, z\}\}$, se tiene que $w \neq z$. Pues, si $w = z$, se tendría $x = y$ (→←).

Luego, para $w \neq z$:

$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{w\}, \{w, z\}\} \Rightarrow \{x\} = \{w\} \vee \{x\} = \{w, z\}$

$\Rightarrow x = w \vee x = w = z$ (no es posible, pues $w \neq z$)

Entonces,

$\{x\} = \{w\} \wedge \{x, y\} = \{w, z\} \Rightarrow x = w \wedge y = z.$

ii) $x = w \wedge y = z \Rightarrow (x, y) = (w, z)$

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{w\}, \{w, z\}\} = (w, z) \Rightarrow (x, y) = (w, z)$

En consecuencia, de (*i*) y (*ii*): $(x, y) = (w, z) \Leftrightarrow x = w \wedge y = z.$

Corolario: $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b.$

Ejemplo. Hallar los números reales x que satisfacen,

$(x^2 + 3x, x - 3) = (4, -2)$

Solución. Por igualdad de pares,

$$x^2 + 3x = 4 \ \wedge \ x - 3 = -2 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \ \wedge \ x = 1$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 1) = 0 \ \wedge \ x = 1$$

$$\Rightarrow (x = -4 \ \vee \ x = 1) \wedge \ x = 1$$

$$\Rightarrow x = 1 \qquad \text{(ley de absorción)}$$

Por tanto, $x = 1$.

En general, se tiene que: $(x, y) \neq (w, z) \Leftrightarrow x \neq w \ \vee \ y \neq z$.

Por ejemplo, el par ordenado (8, 6) es diferente al par ordenado (6, 8). Pues, por definición de par ordenado.

$(8, 6) = \{\{8\}, \{8, 6\}\}$ y $(6, 8) = \{\{6\}, \{6, 8\}\}$

y por conjuntos se sabe que $\{\{8\}, \{8, 6\}\} \neq \{\{6\}, \{6, 8\}\}$. En conclusión, $(8, 6) \neq (6, 8)$.

Para A y B son conjuntos, sea $A \times B$ el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) donde $x \in A$ y $y \in B$. $A \times B$ se conoce como producto cartesiano de A y B (o conjunto producto de A y B). Suponiendo que $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, se tiene que existen 3 maneras de elegir la primera componente del par ordenado y, para cada elección, hay 2 maneras de seleccionar la segunda componente del par ordenado. Como se tiene 3 grupos de 2, hay 3 x 2 = 6 elementos en $A \times B$. Es decir,

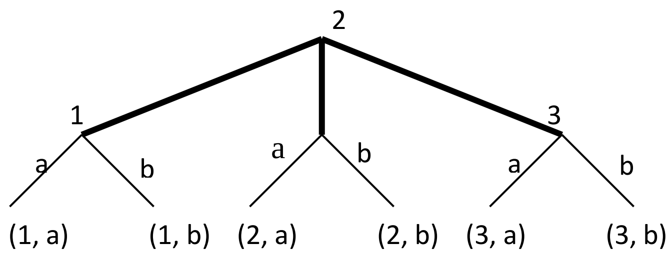


*Figura 8.*Gráfica de árbol

Luego, $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

Definición.- Sean A y B dos conjuntos, se llama producto cartesiano de A y B, o simplemente, producto de los conjuntos A y B; al conjunto

$$A \times B = \{(x, y) \in P\,(P\,(A \cup B)) \,/\, x \in A \wedge y \in B\}$$

Caracterización:

$$u \in A \times B \Leftrightarrow u = (x, y) \,/\, x \in A \wedge y \in B$$

o, también:

$$(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

Equivalentemente:

$$(x, y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B.$$

Nota. Obsérvese que $A \times \phi = \phi$. En efecto, si $A \times \phi$ no fuese vacío, entonces existiría, al menos, un par $(a, b) \in A \times \phi$. Luego,

$$(a, b) \in A \times \phi \Rightarrow a \in A \wedge b \in \phi$$

$$\Rightarrow b \in \phi \;(\rightarrow\leftarrow)$$

Contradice a que ϕ no posee elementos.

Por ejemplo, si $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 3\}$, entonces

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3), (5, 2), (5, 3)\}$

$B \times A = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$

En general, tenemos que $A \times B \neq B \times A$. Es decir, el producto cartesiano de conjuntos no es conmutativo.

Ejemplo. Considerando el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

Cada punto P representa un par ordenado (x, y) de números reales y viceversa, $\mathbb{R}^2$ se le llama generalmente plano cartesiano.

Ejemplo. Si $A = \{2, 4, 6\}$, entonces

$A \times A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (6, 2), (6, 4) (6, 6)\} = A^2$

Propiedades

El producto cartesiano es distributivo respecto de la unión y la intersección de conjuntos, es decir, si A, B y C son tres conjuntos cualesquiera, se verifica:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Demostración.

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Sea (x, y) un elemento arbitrario de $A \times (B \cup C)$, entonces

$$\begin{aligned}(x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C)\\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)\\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)\\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in A \times C\\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)\end{aligned}$$

Luego, $(\forall x)[(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)]$

es decir, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Las propiedades en *b*), *c*) y *d*) se demuestran de una forma similar.

Ejemplo. Demostrar que

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

Solución. Sea (a, b) un elemento arbitrario de $(A \times B) \cap (C \times D)$. Entonces,

$$\begin{aligned}b) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \wedge (a, b) \in (C \times D) &&\text{(def. de } \cap)\\ &\Leftrightarrow (a \in A \wedge b \in B) \wedge (a \in C \wedge b \in D) &&\text{(def. de producto)}\\ &\Leftrightarrow (a \in A \wedge a \in C) \wedge (b \in B \wedge b \in D) &&\text{(asoc. y conm.)}\\ &\Leftrightarrow a \in A \cap C \wedge b \in B \cap D &&\text{(def. de } \cap)\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ $(a, b) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ (def. de producto)

Ejemplo. Para A, B y C subconjuntos de $\mathbb{E}$, probar que

$$A \text{ x } (B - C) = (A \text{ x } B) - (A \text{ x } C)$$

Demostración. En efecto, sea (a, b) un elemento cualquiera. Entonces,

$$\begin{aligned}
(a, b) \in A \text{ x } (B - C) &\Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B - C \\
&\Leftrightarrow a \in A \wedge (b \in B \wedge b \notin C) \\
&\Leftrightarrow (a \in A \wedge b \in B) \wedge (a \in A \wedge b \notin C) \\
&\Leftrightarrow (a, b) \in A \text{ x } B \wedge (a, b) \notin A \text{ x } C \\
&\Leftrightarrow (a, b) \in (A \text{ x } C) - (A \text{ x } C)
\end{aligned}$$

Luego, $(\forall\, (a, b))[(a, b) \in A \text{ x } (B - C) \Leftrightarrow (a, b) \in (A \text{ x } C) - (A \text{ x } C)]$

Es decir, $A \text{ x } (B - C) = (A \text{ x } B) - (A \text{ x } C)$.

Ejercicios Propuestos

1. En cada caso determine los valores de x e y.

a) $(y - 2, 2x + 1) = (x - 1, y + 2)$

b) $(5x + 2y, -4) = (-1, 2x - y)$

c) $(x + 4, 6) = (10, y - x)$

d) $(x - 7y, 2x - 6y) = (15, -10)$

2. Probar que: $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B \vee A = \phi \vee B = \phi$.

3. Si $A \times B \neq \phi$, probar que: $A \times B \subset C \times D \Leftrightarrow A \subset C \wedge B \subset D$.

4. Probar que

a) $A \subset B \Rightarrow A \times C \subset A \times B$

b) $A \times C = B \times C \wedge C \neq \phi \Rightarrow A = C$

CAPÍTULO III

Operaciones Generalizadas

3.1 Introducción

Las operaciones de unión e intersección han sido definidas para dos conjuntos. Esta noción la podemos extender a familias de conjuntos. Una de las leyes del álgebra de conjuntos expresa que

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Es natural esperar que algo similar se cumpla si en lugar de tener tres conjuntos, tenemos cuatro, cinco, etc. Por ejemplo, para cuatro y cinco tenemos

$A \cap (B \cup C \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)$, y

$A \cap (B \cup C \cup D \cup E) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (A \cap E)$

Para expresar leyes similares a éstas, donde intervengan colecciones arbitrarias de conjuntos, usamos los índices. Por ejemplo, si tenemos n conjuntos ($n \in \mathbb{N}$) lo denotamos de la siguiente manera:

$$A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$$

Los números 1, 2, . . . , n se llaman índices y sirven para distinguir los conjuntos.

3.2 Familia de Conjuntos

Una manera sencilla de manejar una colección de n conjuntos es llamarlos $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$. En este caso decimos que la colección de conjuntos tiene índices. Por ejemplo, $\{A_i / i \in \mathrm{I}\}$ tiene índices en I mientras que $\{A_1,\ A_2, \dots,\ A_n\}$ representa una familia de conjuntos con índices en

$\mathbb{N}$. Luego, se dice que la colección $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ es indizada y el conjunto $\{A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n\}$ es una familia indizada de conjuntos.

Consideremos, entonces, una familia finita de conjuntos $\{A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n\}$Aquí, cada miembro A_i de la familia es identificada por un índice i. Al conjunto formado por todos los índices

I = $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$le llamaremos conjunto de índices de la familia, y de $\{A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n\}$

diremos que es una familia indizada de conjuntos, y la denotaremos por $\{A_i\}_{i\in \mathrm{I}}$.

Definición.- Sea I $\neq \phi$ un conjunto de índices. Si se considera una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in \mathrm{I}}$, entonces se dice que esta familia está indizada por I. Los conjuntos A_i no necesariamente son diferentes.

Nota. La notación $\{A_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ se lee como “la familia de todos los A_i cuando i recorre I”. En ocasiones escribiremos $\{A_i\}$, si no ofrece dudas sobre cuál es el conjunto de índices. El conjunto de índices depende del problema que esté relacionado, como veremos en los ejemplos.

Ejemplo. Para $i \in \mathrm{I}$ definimos los siguientes intervalos en $\mathbb{R}$:

$$A_i = [-i, i] \ \text{ y } \ B_i = [i, 2i]$$

- Algunos subconjuntos de A_i son:

$$A_1 = [-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} \ / -1 \leq x \leq 1\}$$

$$A_3 = [-3, 3] = \{x \in \mathbb{R} \ / -3 \leq x \leq 3\}; \text{ etc.}$$

- Algunos subconjuntos de B_i son:

$$B_2 = [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 \leq x \leq 4\}$$

$B_4 = [4, 8] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 4 \leq x \leq 8\}$; etc.

Ejemplo. Sea la familia indizada $\{A_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ donde el conjunto de índices es I = {4, 5, 6, 7} y

$A_i = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \ \wedge\ x \text{ es múltiplo de } i\}$

Determinar por extensión cada miembro de esta familia.

Solución.

- $A_4 = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \ \wedge\ x \text{ es múltiplo de } 4\} = \{52, 56, 60\}$
- $A_5 = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \ \wedge\ x \text{ es múltiplo de } 5\} = \{50, 55, 60\}$
- $\mathrm{A}_6 = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \ \wedge\ x \text{ es múltiplo de } 6\} = \{54, 60\}$
- $\mathrm{A}_7 = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \ \wedge\ x \text{ es múltiplo de } 7\} = \{56\}$

Ejemplo. Sea la familia indizada $\{A_i\}_{i \in \mathrm{I}}$, donde I = {1, 2, 3, 4} y

$A_i = \{x \in \mathbb{N} \,/\, i + 1 \leq x \leq i + 3\}$

Determinar por extensión cada miembro de esta familia.

Solución.

$A_1 = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 + 1 \leq x \leq 1 + 3\} = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 2 \leq x \leq 4\} = \{2, 3, 4\}$

$A_2 = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 2 + 1 \leq x \leq 2 + 3\} = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 3 \leq x \leq 5\} = \{3, 4, 5\}$

$A_3 = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 3 + 1 \leq x \leq 3 + 3\} = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 4 \leq x \leq 6\} = \{4, 5, 6\}$

$A_4 = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 4 + 1 \leq x \leq 4 + 3\} = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 5 \leq x \leq 7\} = \{5, 6, 7\}$

Nota. Las familias de conjuntos dadas en los ejemplos anteriores son familias finitas (tienen un número finito de miembros) Podemos considerar, también, familias infinitas.

3.3 Operaciones

Sea la familia de tres conjuntos $\{A_1,\ A_2, A_3\}$, indizada por I = {1, 2, 3}. Luego,

- La unión $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ está formada por los elementos que pertenecen, por lo menos, a alguno de los tres conjuntos. Entonces,

$$\mathrm{x} \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \iff x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee x \in A_3$$

O bien,

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \iff \exists\, i \in \mathrm{I} = \{1, 2, 3\} \text{ tal que } x \in A_i$$

- Análogamente, la intersección $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, está formada por los elementos que pertenecen a los tres conjuntos. Esto es

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \iff x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge x \in A_3$$

O bien,

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \iff \forall\, i \in \mathrm{I} = \{1, 2, 3\},\ x \in A_i$$

Si $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ son conjuntos, entonces la unión de todos ellos $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ se escribe:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

la intersección $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n$ se escribe

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Ejemplo. Sea la familia indizada $\{A_i\}_{i\in I}$, con I = {1, 2, 3, 4, 5} definida por

A_i = {n + i / 0 ≤ n ≤ 3, $n \in \mathbb{N}$ } con $i = 1, 2, 3, 4, 5$

entonces, tenemos que

A_1 = {n + 1 / 0 ≤ n ≤ 3} = {1, 2, 3, 4}

A_2 = {n + 2 / 0 ≤ n ≤ 3} = {2, 3, 4, 5}

A_3 = {n + 3 / 0 ≤ n ≤ 3} = {3, 4, 5, 6}

A_4 = {n + 4 / 0 ≤ n ≤ 3} = {4, 5, 6, 7}

A_5 = {n + 5 / 0 ≤ n ≤ 3} = {5, 6, 7, 8}

Luego,

$$\bigcup_{i=1}^{5} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{5} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \phi$$

3.3.1 Unión Generalizada

Definición.- Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indizada de conjuntos, con $A_i \subset \mathbb{E}$. La unión de esta familia es el conjunto.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in \mathbb{E} / \exists i \in \mathrm{I} \text{ tal que } x \in A_i\}$$

Caracterización:

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \iff \exists\, i \in \mathrm{I} / x \in A_i$$

Por el contrario,

$$x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i \iff \forall\, i \in \mathrm{I} / x \notin A_i$$

3.3.2 Intersección Generalizada

Definición.- Sea $\{A_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ una familia indizada de conjuntos, con $A_i \subset \mathbb{E}$. La intersección de esta familia es el conjunto.

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in \mathbb{E} / \forall\, i \in \mathrm{I}, x \in A_i\}$$

Caracterización:

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff \forall\, i \in \mathrm{I}, x \in A_i$$

Equivalentemente,

$$x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff \exists\, i \in \mathrm{I} / x \notin A_i$$

Nota. Si el conjunto de índices es el conjunto finito I = {n, n+1, n+2, . . . , m}, entonces denotamos:

$$\bigcup_{i=n}^{m} A_i \qquad y \qquad \bigcap_{i=n}^{m} A_i$$

Ejemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ positivo consideremos el conjunto

$A_n = \{k \in \mathbb{N}$ / n divide a $k\} = \{k \in \mathbb{N} / n|k\}$

Esta familia la podemos denotar de las siguientes maneras

$\{A_n\}_{n\in \mathrm{I}}$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

Donde el conjunto de índices es I = $\{n \in \mathbb{N} / n \geq 1\}$ y se sobrentiende que los índices son números naturales desde el 1 en adelante. Algunos de estos conjuntos son:

$A_1 = \mathbb{N}$

$A_2 = \{0, 2, 4, . . . \} = \{k \in \mathbb{N}$ / k es par}

$A_7 = \{0, 7, 14, 21, 28, . . . \} = \{7\,k / k \in \mathbb{N}\}$

Por ejemplo, tenemos que

$$\bigcap_{i=2}^{5} A_i = A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$$

= {$k \in \mathbb{N}$ / k es divisible por 2, 3, 4 y 5}

= {$k \in \mathbb{N}$ / k es divisible por 60} = {0, 60, 120, . . . }

Podemos también tomar la unión o la intersección de todos los conjuntos indizados. En este caso escribiremos.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad , \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Notamos que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N} \quad , \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$$

Ejemplo. Si I = ℕ y para cada n ∈ I, $B_n = \left]\frac{1}{n}, 1\right]$, hallar

$$\bigcup_{n\in \mathrm{I}} B_n \quad y \quad \bigcap_{n\in \mathrm{I}} B_n$$

Solución. Si $B_n = \left]\frac{1}{n}, 1\right]$, y n ∈ I = ℕ = {1, 2, 3, . . . }, entonces

para n = 1, $B_1 = \,]1, 1]$ = ϕ

para n = 2, $B_2 = \left]\frac{1}{2}, 1\right]$

para n = 3, $B_3 = \left]\frac{1}{3}, 1\right]$

.

.

.

cuando n tiende a ∞, $\frac{1}{n}$ tiende a 0. Entonces, $B_\infty = \,]0, 1]$. Por tanto,

$$\bigcup_{n\in \mathrm{I}} B_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_\infty = \phi \cup \left]\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left]\frac{1}{3}, 1\right] \cup \dots \cup \left]0, 1\right] = \left]0, 1\right]$$

$$\bigcap_{n\in \mathrm{I}} B_n = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_\infty = \phi \cap \left]\frac{1}{2}, 1\right] \cap \left]\frac{1}{3}, 1\right] \cap \dots \cap \left]0, 1\right] = \phi$$

Teorema. Leyes de Morgan

Sea $\{A_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ una familia indizada de conjuntos. Entonces,

$$a) \ \left(\bigcup_{i\in \mathrm{I}} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in \mathrm{I}} A_i^c$$

$$b) \ \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

Demostración. Probaremos a).

Sea *x* un elemento cualquiera de $\mathbb{E}$. Entonces,

$$x \in \left(\bigcup_{i\in \mathrm{I}} A_i\right)^c \iff x \notin \bigcup_{i\in \mathrm{I}} A_i$$

$$\iff \forall\ i \in \mathrm{I},\ x \notin A_i$$

$$\iff \forall\ i \in \mathrm{I},\ x \in A_i^c$$

$$\iff x \in \textstyle\bigcap_{i\in I} A_i$$

Ejemplo. Sea *B* un conjunto y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Probar,

$$a) \ B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (B \cup A_i)$$

$$b)\ B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

Demostración.

$a)$ Ejercicio.

$b)$ Probaremos $B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

Sea x un elemento cualquiera de $\mathbb{E}$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in B \cap \left(\bigcup_{i \in \mathrm{I}} A_i \right) &\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in \bigcup_{i \in \mathrm{I}} A_i \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{B} \wedge (\exists\, i \in \mathrm{I} \,/ x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \exists\, i \in \mathrm{I} \,/\, x \in B \wedge x \in A_i \\ &\Leftrightarrow \exists\, i \in \mathrm{I}/x \in B \cap A_i \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in \mathrm{I}} (B \cap A_i) \end{aligned}$$

Propiedad. Leyes distributivas

Se puede expresar las leyes distributivas generalizadas usando una notación donde interviene el producto cartesiano. Sean $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ dos familias indizadas de conjuntos. Denotaremos con I = {1, 2, . . . , n} y con J = {1, 2, . . . , m} los conjuntos de índices, respectivamente. Entonces tenemos que:

$$a)\ \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right] \cap \left[\bigcup_{j=1}^{m} B_j \right] = \bigcup_{(i,j) \in I x J} \left(A_i \cap B_j \right)$$

$$b)\ \left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] \cup \left[\bigcap_{j=1}^{m} B_j\right] = \bigcap_{(i,j)\in IxJ} \left(A_i \cup B_j\right)$$

Ejemplo. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ son dos familias indizadas de conjuntos, entonces probar que

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}\left(A_i - B_j\right)\right)$$

Solución.

$$x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \notin \bigcup_{j\in J} B_j$$

$$\Leftrightarrow \exists\, i \in I / x \in A_i \wedge \forall\ j \in J.\ x \notin B_j$$

$$\Leftrightarrow \exists\ i \in I \ / \ x \in A_i \wedge x \notin B_j, \forall\, j \in J$$

$$\Leftrightarrow \exists\, i \in I / \ x \in \left(A_i - B_j\right), \forall\, j \in J$$

$$\Leftrightarrow \exists\, i \in I \ / \ x \in \bigcap_{j\in J}\left(A_i - B_j\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}\left(A_i - B_j\right)\right)$$

3.4 Partición y Cubrimiento

3.4.1 Partición

Se dice que la familia de conjuntos $\{A_i\}, i \in I$ distintos del conjunto vacío y constituye una partición del conjunto B si

$$B = \bigcup_{i\epsilon I} A_i$$

Los conjuntos $A_i$disjuntos dos a dos (es decir$A_I \cap A_J = \emptyset, si \ \ I \neq J$)

Propiedad: Toda partición es un recubrimiento

Ejemplo

Sea U=N

$A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{4,5,6\}$ y $A_3 = \{4,7,8,9\}$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ y $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$

$B = \{x\epsilon \text{N} \ / \ 1 \leq x \leq 9\}$

Solución

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = B$, cumple con el recubrimiento

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ y $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$, no cumple con la partición

Ejemplo

Sea U=N

$A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{4,5,6\}$ y $A_3 = \{4,7,8,9\}$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ y $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$

$C = \{x\epsilon \text{N} \ / \ 1 \leq x \leq 10\}$

Solución

No es una partición del conjunto c.

No es recubrimiento.

Ejemplo

Sea U=N

$A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{4,5,6\}$ y $A_3 = \{4,7,8,9\}$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ y $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$

$D = \{x \epsilon \mathrm{N} \ / \ 1 \leq x \leq 8\}$

Solución

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \neq \{1,2,3,4,5,6,7,8\} = D$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ y $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$

3.4.2 Cubrimiento

Se dice que la familia de conjuntos $\{A_i\}$,$i \ \epsilon \ I$ distintos del conjunto vacio y constituye un recubrimiento del conjunto B,si la unión contiene a B, es decir si :

$$B \subset \bigcup_{i \epsilon I} A_i$$

Ejemplo

$A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$ y $A_3 = \{4,5,6\}$

$B = \{x \epsilon \mathrm{N} \ / \ 1 \leq x \leq 5\}$

Solución

La colección o familia de conjuntos $\{A_1, A_{2,} A_3\}$

Es un recubrimiento del conjunto $B = \{x \epsilon \mathrm{N} \ / \ 1 \leq x \leq 5\}$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4,5,6,7\} \supset \{1,2,3,4,5\} = B$

Ejercicios Propuestos

1. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sea $A_i = \{n^i \ / \ 0 \leq n \leq 3\}$.

a) Determinar por extensión los conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5.

b) Determine los elementos de $A_3 - A_5$ y $A_5 \cap A_4$.

2. Sea $\mathbb{Z}^+$, el conjunto de los enteros positivos. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sean

$A_n = \{n, \ n + 1, n + 2, \ldots\} = \{k \in \mathbb{N} \ / \ k \geq n$

$B_\mathrm{n} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2n\} = \{k \in \mathbb{N} \ / \ k \leq 2n\}$

a) Determine A_4 y B_4.

b) Halle $A_n \cap B_\mathrm{n}$ y A_n^c para n = 1, 2, 3 y 7.

c) Determine

$$\bigcup_{n=3}^{6} A_n \, , \bigcup_{n=3}^{6} B_n \, , \bigcap_{n=3}^{6} A_n \, , \bigcap_{n=3}^{6} B_n$$

d) Determine

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)^c$$

3. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ son dos familias indizadas de conjuntos, entonces probar que

$$\left(\bigcap_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{A_i}\right) - \left(\bigcap_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}} \mathbf{B_j}\right) = \bigcap_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\left(\bigcup_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}}(\mathbf{A_i} - \mathbf{B_j})\right)$$

4. Si $X_n = \left[1,\ 1+\frac{1}{n}\right]$ y I = {2, 5, 6, 7}, hallar

$a)\ \bigcup_{n\in I} X_n$ $\qquad$ $b)\ \bigcap_{n\in I} X_n$

5. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ son dos familias de conjuntos, indizadas por el mismo conjunto I, y se

cumple que $A_i \subset B_i$, $\forall\ i \in I$, probar que:

$a)\ \bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\epsilon I} B_i$ $\qquad$ $b)\ \bigcap_{i\epsilon I} A_i \subset \bigcap_{i\in I} B_i$

6. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ son dos familias indizadas de conjuntos, entonces probar que

$$a)\ \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in IxJ} (A_i \cap B_j)$$

$$b)\ \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in IxJ} (A_i \cup B_j)$$

3.5 Resolución de problemas basado en conjuntos

1. Determine la verdad (v) o falsedad (f) de las proposiciones respecto del conjunto.

$A = \left\{1; \{3\}; \left\{\{8\}\right\}; \{7; 8\}\right\}$

$5 \subset A$ (F)

$6 \subset A$ (F)

$10 \not\subset A$ (V)

2. Los dos conjuntos son iguales, hallar x.

$A = \{40; x + 5\}$ $B = \{40; 10\}$

Solución

$x + 5 = 10$

$x = 5$

3.Hallar el conjunto potencia.

$A = \{53; 62; 18\}$

Solución

P(A) $= 2^3 = 8$

4.Hallar el conjunto potencia.

$B = \{x \,/ x \text{ es impar } \wedge 0 < x < 2\}$

Solución

$P(B) = 2^1$=2

5. El siguiente par ordenado, hallar x.

$(50; 5) = (x + 3; 5)$

Solución

$50 = x + 3$

$x = 47$

6. Hallar la potencia.

$B = \{x\ /x\ es\ par\ \wedge 0 < x < 5\}$

Solución

$P(B) = 2^2 = 4$

7. Los dos conjuntos son iguales, hallar x.

$A = \{3; X + 10\}$

$B = \{3; 60\}$

Solución

$x + 10 = 60$

$x = 50$

8.Sean los conjuntos ,hallar AUB

$A = \{3; 4; 13; 14\}$

$B = \{4; 5; 16; 17\}$

Solución

$AUB = \{3; 4; 5; 13; 14; 16; 17\}$

9.Sean los conjuntos, hallar $A \cap B$

$A = \{23; 24; 37; 100\}$

$B = \{24; 45; 56; 99\}$

Solución

$A \cap B = \{24\}$

10.Sean los conjuntos, hallar A-B

$A = \{3; 15; 17; 21\}$

$B = \{3; 5; 5; 77\}$

SOLUCIÓN

$A - B = \{15; 17; 21\}$

CAPÍTULO IV

Aplicación Didáctica

Epistemología y Didáctica de la Teoría de Conjuntos

Epistemología de la teoría de conjuntos

Es el estudio del conocimiento de la teoría de conjuntos, también la epistemología se ocupara de los problemas que son la circunstancia histórica, psicológica y sociológica que llevan a la obtención del conocimiento amplio sobre el tema que estaos tratando .

¿Por qué estudiar la teoría de conjuntos?

Porque nos proporcionará una idea precisa de los diferente tipos de conjuntos que existen, y apartir de los conjuntos se a formado la relaciones, funciones y muchos más temas.

¿Cómo se aplica la teoría de conjuntos en la tecnología?

En la actualidad se aplica en muchas áreas, ya que la teoría de conjuntos se basa en principios matemáticos,

Por ejemplo:

La proposición de conjuntos aplicada al balanceo de linfocitos y leucocitos: agüero de linfocitos T CD4 de pacientes con virus de la inmunodeficiencia humana/sida.

Sesión de Aprendizaje Significativo

Título: "Conociendo la teoría de conjuntos"

1.Datos de la institución:

1.1.-I. E.P: Galeno Lima Sur 1.5.-Grado : 1ero de secundaria

1.2.-Ugel:Nº 01-S.J.M 1.6.-Tiempo:2horas

1.3.- Área: Matemática 1.7.-Profesor: Jeyson Aguilar Polanco

TEMA TRANSVERSAL: Educación para los derechos humanos y los valores

I. Capacidad , indicador y instrumento

Capacidad	Indicador	Instrumento
matemática y situaciones	Construye conjuntos y resuelve operaciones con conjuntos	Ficha de practica

Aprendizaje esperado: Conocer los diferentes tipos de conjuntos y sus operaciones entre conjuntos.

II. Organización de la sesión de aprendizaje significativo

Momentos	Estrategias	Recursos de Materiales	Tiempo
Inicio Presentación	El profesor inicia la clase ,con un saludo cordial y los motiva contado una historia de reflexión, y como es la importancia de abordar el tema de la teoría de conjuntos .		15min
Conflicto cognitivo	¿Qué es un conjunto? ¿Cómo se determina un conjunto? ¿tipos de conjuntos?		
Desarrollo Proceso	El profesor desarrolla el tema de la teoría de conjuntos en la pizarra ,muestra la notación de un conjuntos, su relación de pertenencia , representación gráfica , determinación de conjuntos , los tipos de conjuntos y la operaciones con conjuntos ,los alumnos toman nota de la clase escriben sus ejemplos ,luego salen a la pizarra a escribir su ejemplos pensados. Los alumnos unen conjuntos e intersectan conjuntos.		60min
Cierre salida	El profesor entrega una pequeña ficha de evaluación. Y deja una actividad para la		

	casa.		
Meta cognición	¿Qué tema trabajamos? ¿Cómo trabajamos? ¿Para qué nos servirá saber este tema?		15min

III. Evaluación de los aprendizajes

VALOR	CAPACIDAD	INDICADOR	INSTRUMENTO
responsabilidad respeto solidaridad	Matemática y situaciones. Comunica y representa ideas matemáticas. elabora y usa estrategias.	Diferencia los tipos de conjuntos. Analiza la operaciones de conjuntos. Participar dando una opinión crítica respecto al tema.	Registro auxiliar Lista de asistencia

Práctica

Desarrolla los siguientes ejercicios, según lo aprendido.

1. Determine la verdad o falsedad de las siguiente proposiciones

Sea $B = \left\{1, \{7; 0\}, \left\{9; \{3\}\right\}\right\}$

- $1 \epsilon B$
- $\{7; 0\} \epsilon B$
- $9 \epsilon B$
- $3 \epsilon B$

2. Dados los conjuntos

$c = \{a + 2 \ / 1 < a < 6; a \epsilon Z\}$

$B = \{a + 2/ \ \ 0 < a < 6\}$

Halle la suma del mayor elemento de C más el mayor elemento de D.

3.Dado el conjunto A:

A= {3, {8}, 4,{2,5}}

Coloque el valor de verdad a cada afirmación e indique el número de proposiciones verdaderas:

* 3∈A ( ) * {4}∈A ( )

$* 2 \in A$ ( ) $*\{3; \{8\}\} \in A$ ( )

$* \{8\} \in A$ ( ) $* A \in 5$ ( )

4. Determine la suma de los elementos del conjunto

$A = \{X^2 + 1 / X \in Z \ \Lambda \ -3 < X < 3\}$

5. Determine la suma de los elementos del conjunto

$A = \{1; 2; 9\}$

6. Hallar el cardinal del conjunto A.

$A = \{1; 2; 3; 7; 9\}$

7. Hallar el cardinal del conjunto B.

$B = \{x/x \ es\ una\ vocal\ de\ la\ palabra\ \ AMARILLO\}$

8. Hallar el cardinal del conjunto B.

Dado los conjuntos

$A = \{x/x^x < 10; x\epsilon\ Z^+\}$

$B = \{x \notin A\ /X^2 < 20; x\epsilon\ Z^+\}$

Calcule n(A)+ n(B)

Actividad

1. Determine la verdad (v) o falsedad (f) de las proposiciones respecto del conjunto.

$A = \left\{4; \{8\}; \left\{\{9\}\right\}; \{7; 8\}\right\}$

$4 \subset A$

$9 \subset A$

$10 \not\subset A$

2. Los dos conjuntos son iguales, hallar x.

$A = \{10; x + 1\} \qquad B = \{10; 20\}$

3.Hallar el conjunto potencia.

$A = \{5; 6; 8\}$

4.Hallar el conjunto potencia.

$B = \{x / x \; es \; impar \; \wedge 0 < x < 6\}$

5. El siguiente par ordenado, hallar x.

$(11; 8) = (x + 3; 8)$

6. Hallar la potencia.

$B = \{x / x \; es \; par \; \wedge 0 < x < 5\}$

Síntesis

Conjunto: Es el agrupamiento o la colección de objetos ,que se representa que lo representaremos con una letra mayúscula .

Por extensión o **enumeración**: nombra a cada uno de los elementos en forma específica.

Por comprensión: nombra de forma general, que los elementos comparten características en común.

Cuantifcador:nos indicara el valor de veracidad o falsedad.

Conjunto Finito:tiene una cantidad de elementos limitados.

Conjunto Infinito: tiene una cantidad de elementos ilimitados.

Conjunto Vacío: no posee elementos.

Conjunto Unitario :teniendo solo un elemento.

Conjunto de Conjuntos: todos elementos son conjuntos.

Apreciación Crítica y Sugerencias

Apreciación crítica

La teoría de conjuntos es un tema fundamental para entender como se forman los diferentes tipos de conjuntos, como relacionan los conjuntos y como contribuyen la diferentes propiedades a la formación de nuevos conjuntos. Ya que la teoría de conjuntos es un tema amplio.

La teoría de conjuntos es un tema que se desarrolla muy poco en los colegios, se enseña en primaria y en 1 ero de secundaria en la actualidad.

Sugerencias

Se debe Explicar al estudiante la importancia de aprender y desarrollar el tema de conjuntos.

Para la mejor comprensión y desarrollo del estudiante, es necesario que cuando se mencione los conceptos de elemento y conjunto se aborde situaciones contextualizables para alcanzar el aprendizaje de estudiante.

Referencias Bibliográficas

Venero, A (2012). *Matemática Básica* .Perú: Atenea

Espinoza, E.(2002).*Matemática básica* .Perú:Edukperu

Rojo,A.(1978).*Algebra I* .Argentina: El Ateneo

Ampuero,J.(1990) .*Aritmética Teórica.* Perú .Universidad de San Marcos

Pinzón, A.(1975).*Conjuntos y Estructuras*. México: Harla

Carranza ,C y Kong ,M.(1990). *Teoría de conjuntos y Números naturales.*Perú: Concytec

Ivorra, C .(2015) .*La Axiomática de la Teoría de Conjuntos*.Recuperado de https://www.uv.es/=ivorra/libros.htm.

Suárez, M. (2015). *Teoría de Conjuntos. Recuperado* de http://es.scribd.com/doc/281247737/*Teoría-de-conjuntos#logout*..

Cignoli, R.(2016).*Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción*.Recuperado de http://cms.dm.uba.ar/depto/public/grado/fascgrado8.pdf

Conclusiones

La teoría de conjuntos es esencial para comprender como se forman los diferente conjuntos y que es el inicio para poder comprender la formación de relaciones y funciones.

Aprender el tema de la teoría de conjuntos es un conocimiento enriquecedor para el estudiante en su aprendizaje.

Se debe utilizar las propiedades, gráficas y definiciones para apoyarnos en la resolución de ejercicios.

Apéndice

Variables

$x, y, z, \dots \dots, \alpha, \beta, \gamma, \delta, x_1, x_2, x_3, \dots ..$

Conectivos lógicos y otros

$\neg, \wedge, \exists, (,), =$

Formulas

$\emptyset(x, y, z, \dots .)$ $x \exists \alpha_1 \wedge \epsilon$

Formulas bien formadas

$x \epsilon y$, $x = y$ son formulas (formula atómica)

Si φ, ψ so formulas entonces $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \, \exists x \, \varphi$ son formulas

Cuantificador

$\neg, \sim$: Negación

$\exists$: Existencialo

Símbolos

(,): Paréntesis

= : Igual

Para abreviar

$x \neq y$; $\neg(x = y)$

$x \notin y$; $\neg(x \epsilon y)$

$\varphi \vee \psi$; $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$\varphi \rightarrow \psi$; $\neg\varphi \vee \psi$

$\varphi \leftrightarrow \psi$; $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi\ )$

$\forall x(\varphi(x))$; $\neg(\exists x(\neg\varphi(x)))$

$x \subseteq y$; $\forall z(z \epsilon x\ \rightarrow z \epsilon y)$

$\exists x \epsilon\ y(\varphi(x))$; $\exists x(x \epsilon y \wedge \varphi(x))$ o también

$\exists x\ \exists x, y, z, \dots \dots$; $\exists x, \exists y, \exists z, \dots \dots$

Ocurrencia libres

Son aquellas variables que en unas fórmulas no son alcanzados por un cuantificador existencial o univerversal.

A; B,C,D: Conjuntos (usaremos letras mayúsculas para indicar un conjunto.)

a;e;i;o: elementos (usaremos letras minúsculas para indicar un elemento)

$\emptyset; \{\quad\}$: Símbolo del conjunto vacío.

$\cup$: Símbolo de la unión.

$\cap$:Símbolo de la intersección.