UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN
Enrique Guzmán y Valle
Alma Máter del Magisterio Nacional
FACULTAD DE CIENCIAS
Escuela Profesional de Matemática e Informática

MONOGRAFÍA

ESPACIOS VECTORIALES

Espacios Vectoriales y Subespacios. Combinación Lineal. Subespacios Generados. Dependencia e Independencia Lineal. Base y Dimensión de un espacio Vectorial. Espacio Cociente. Transformaciones Lineales. Espacio de Transformaciones Lineales.

Examen de Suficiencia Profesional Res. N° 1236-2018-D-FAC

Presentada por:

Cruz Martínez, Rudy Genaro

Para optar al Título Profesional de Licenciado en Educación
Especialidad: Matemática e Informática

Lima, Perú
2018

Monografía

ESPACIOS VECTORIALES

Espacios Vectoriales y Subespacios. Combinación Lineal. Subespacios Generados. Dependencia e Independencia Lineal. Base y Dimensión de un espacio Vectorial. Espacio Cociente. Transformaciones Lineales. Espacio de transformaciones Lineales.

Designación de Jurado Resolución N° 1337-2018-D-FAC

Mg. Aurelio Julián GÁMEZ TORRES

Presidente

Lic. Modesto Isidoro GILES NONALAYA

Secretario

Lic. Luis Alfonso ZEGARRA HORNA

Vocal

Línea de investigación: Currículum y formación profesional en educación

Dedicatoria

A mi querido padre Ramón a la memoria de mi madre Nicolasa, que con su comprensión, tolerancia y aliento permanente contribuyeron a mi realización profesional.

A mi hermano Magíster Scientiae Luis Cruz Martínez, por su apoyo incondicional para alcanzar mi objetivo en mi formación profesional.

Índice de contenidos

Lista de figuras

Introducción

En el siglo XX la enseñanza de la matemática se caracterizaba por la presencia de dos corrientes: una que mostraba teorías acabadas sin demostraciones deductivas enfocándose en el dominio de técnicas algorítmicas obtenidas de la teoría; la otra enseñaba las estructuras matemáticas buscando lograr la comprensión por parte de los alumnos del significado de los objetos y procesos de dichas estructuras y luego aplicarlas a problemas de la ciencia, la tecnología y la vida misma. En la primera, no hay espacio para las conjeturas, las generalizaciones, las particularizaciones y el uso de la heurística. Pero en la segunda no hay espacio para la presentación intuitiva y empírica de objetos y procesos matemáticos antes de recibir el discurso formal de la matemática.

Actualmente hay propuestas de estudiar la matemática desde perspectivas diferentes, por ejemplo, Hans Freudenthal nos dice: antes de dar cualquier concepto se debe presentar los fenómenos, las situaciones problemáticas que requieren ser organizadas por tal concepto. Hay que hacer que los estudiantes manipulen los medios de organización. Los problemas deberían compeler al estudiante a constituir el objeto mental que quiere ser matematizado por el concepto.

Esta forma de presentar las matemáticas se contrapone a la tradicional en la cual los conceptos y estructuras se ven como productos culturales, acabados, fijados mediante definiciones y propiedades descontextualizadas y despersonalizadas.

Siguiendo esta perspectiva antes de abordar la teoría formal de los espacios vectoriales presentamos los segmentos orientados como representantes intuitivos y empíricos de los vectores, describimos la dirección, el sentido y el módulo de un vector.

Estos objetos matemáticos los utilizamos en la propuesta didáctica para la enseñanza de los vectores en secundaria. Comenzamos en problemas de la vida cotidiana como de contexto matemático.

Después realizamos la presentación formal de la teoría. Describimos herramientas importantes como: combinación lineal, subespacios, mase y dimensión de un espacio vectorial.

La monografía está estructurada en dos capítulos:

Capítulo I: Espacios vectoriales y comprende aspectos como combinación lineal, subespacios generados-

Capitulo II: Espacio cociente y transformaciones lineales.

Finalmente, se presenta la aplicación didáctica mediante una sesión de aprendizaje, hoja informativa, síntesis, apreciación crítica, conclusiones, referencias.

Capítulo I

Espacios vectoriales

1.1 Definición y propiedades

1.1.1 Definición.

Sea **V** un conjunto no vacío, K un campo, + y x leyes de composición interna en **V** y externa respectivamente; la cuaterna (**V**, +, x, K) tiene la estructura de espacio vectorial si cumple las siguientes condiciones:

A) (**V**, +) es grupo abeliano.

B) La ley externa satisface:

a) $(b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$, $a, b \in K$, $v \in V$

b) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$, $a, b \in K$, $v \in V$

c) 6$a \cdot (v_1 + v_2) = a \cdot v_1 + a \cdot v_2$, $a \in K$, $v_1, v_2 \in V$ iv) $1 \in K$, $1 \cdot v = v$, $v \in V$

Nota:

Denominamos Vectores a cada elemento de los espacios vectoriales. Por comodidad particulizaremos la definición para leyes conocidas como la adición y la multiplicación por un escalar; en tal sentido indicaremos la siguiente:

1.1.2 Definición.

Sea V no vacío; + una ley de composición interna y · una ley de composición externa; decimos que la cuaterna (V, +, x, K) tiene la estructura de espacio vectorial si satisface:

A) (V, +) es grupo abeliano.

B) La ley externa "·" satisface:

- a. (b · v) = (a · b) v a, b ϵ K, v ϵ V
- (a + b) ·v = a·v + b·v, a, b ϵ K, v ϵ V
- a· (v_1 + v_2) = a·v_1 + a·v_2 a ϵ K, v_1, v_2 ϵ V
- 1 ϵ K, 1·v = v v ϵ V

Ejemplos:

a) Considérese R^+ = {x ϵ R / x > 0} y la adición y multiplicación:

$+ :\ R^+ \times R^+ \longrightarrow R^+$

$(u , v) \longrightarrow u + v$

$:\ R \times R^+ \longrightarrow R^+$

$(k, v) \longrightarrow k . v$

Podemos observar que (R+, +, R, ·) no es un espacio vectorial, en principio porque la multiplicación por escalares no es cerrada, en el sentido de que para cualquier

k ϵ R y v ϵ R^+ se tenga k.v ϵ R^+

Definamos:

$+ :\ R^+ \times R^+ \longrightarrow R^+$

$(u, v) \longrightarrow u + v = u . v$

$\cdot :\ R \times R^+ \longrightarrow R^+$

$(k, v) \longrightarrow k . v$

Usando propiedades elementales de los reales, así como algunas leyes de exponentes, es fácil verificar que (R^+, +, x, R) es un espacio vectorial [el cero es el 1 $\in R^+$ y, para un vector $v \in R^+$, su opuesto aditivo (- v) es 1/ $v \in R^+$].

Observación:

En el ejemplo anterior observamos que K = R y además se debe tener en cuenta que a los elementos de K se les denomina escalares.

En una presentación más abstracta de la teoría de espacios vectoriales, se pide que estos escalares sean elementos de un campo K. En tal caso se dice que se trata de un "espacio vectorial sobre el campo K". Si K es el campo de los números reales, se dice que el espacio vectorial es "sobre los reales".

Similarmente, cuando K es el campo de los números complejos, se dice que se trata de un espacio vectorial complejo.

b) Sea V = R y K = Q entonces la cuaterna (R, + , x , Q) es un espacio vectorial , porque verifica:

(R , +) es un grupo abeliano ya que:

- $\forall$ a, b, q $\in$ R: a + (b + q) = (a + b) + q
- Existe en R el 0 que verifica:
- a+0 = 0+a= a, $\forall$ a $\in$ R
- Para cada a $\in$ R, existe (-a) $\in$ R que

  verifica: a + (-a) = (-a) + a = 0
- $\forall$ a, b $\in$ R, se verifica: a + b = b + a

La Ley de Composición Externa "x" satisface:

- $q_1 . (q_2 . v) = (q_1 . q_2) . v$ $\forall q_1, q_2 \in Q$, $v \in R$
- $(q_1 + q_2). v = q_1 . v+ q_2 . v$ $\forall q_1, q_2 \in Q$,
- $v \in R$ $q_1 (v_1 + v_2) = q_1.v_1 + q_1.v_2$
- $\forall q_1 \in Q$, $v_1, v_2 \in R$

- $1 \in Q$, $1 \cdot v = v$, $\forall v \in R$

c) Sea V = C, K = R; la cuaterna (C, +, x , R) ¿Será un espacio vectorial?

Para que (C, +, x , R) sea un espacio vectorial, debe cumplirse **:**

(C,+) sea un grupo abeliano:

Sean (a + b i), (c + d i), (x + y i) tres vectores de C.

- (a+ bi) + [(c+ di) + (x + yi)] = [(a+ bi) + (c+ di)] + (x+ yi)
- a+ b i + (c+ x+ d i+ y i)
- = a + b i + c + x + d i + y i
- = a + c + b i + d i + x + y i
- = (a + b i) + (c + d i) + (x + y i)
- = ((a+ b i) + (c+ d i)) + (x + y i)

Por tanto, se cumple la asociatividad.

Existe en C el **e = 0+ 0 i** , que verifica

- (a + b i) + (0 + 0 i) = (0 + 0 i) + (a + b i) = a + b i
- $\forall$ (a+ b i) $\in$ C, existe **-a + (-b) i** $\in$ C que cumple:

(a + bi) + (-a+(-b)i) = (-a+(-b)i) + (a+bi) = 0

- (a+bi) , (c+di) $\in$ C, se verifica:

(a+bi) + (c+di) = (c+di) + (a+bi)

La ley "x" satisface:

- x (y.(a + b i)) = (x y) (a + b i)
- = a (y a + y b i)
- = x y a + x y b i
- = x y (a + b i)

(x + y) (a + b i) = x.a + x.b.i + y.a + y.b.i

- = x.(a + b.i) + y. (a + b.i)

- $x [(a + b.i) + (c+ di)]= x (a + b i + c + d i)$
- $= x.a + x.b.i+ x.c + x.d.i$
- $= x.(a + b.i) + x (c + d.i)$

Existe 1 en R, $1.(a+bi) = (a+bi)$

Observamos que la cuaterna (C, +, x , R) cumple las dos condiciones de espacio vectorial. Haremos hincapié en el hecho de que en un espacio vectorial no es solamente un conjunto de objetos. Para que un conjunto sea un espacio vectorial, deben existir en él operaciones definidas de adición y multiplicación por escalares y aún más, estas operaciones deben satisfacer las dos condiciones de la definición de espacio vectorial.

1.1.3 Propiedades.

Sea V un espacio vectorial, 0 el vector cero de V entonces:

a) $0.v = 0$

b) $(-1) v = -v$

c) $1.0 = 0$

d) $- (-v) = v$

e) $(- 1) (-v)= v$

f) $u + w = v + w \Rightarrow u = v$

Demostración:

a) $v + 0.v = 1.v + 0.v = v (1 + 0) = v (1) = v$

entonces por la unicidad del cero: $0.v=0$

b) $v + (-1) v = 1.v + (-1) v = v [1+(-1)]= v.0 =0$

entonces por la unicidad del inverso aditivo $(-1) v = -v$

c) $1.0=1. (0. v) = (1.0). v = 0.v =0$

d) $v + (-v) = (-v) + v = 0$.

entonces por la unicidad del inverso aditivo: $-(-v)=v$.

e) $(-1)(-v) = (-1)((-1).v) = (-1)\,(-1).\,v = v$

f) $u + w = v + w$

$u + w + (-w) = v + w + (-w)$

$u+0 = v+0$

$u = v$

1.2 Combinación lineal

1.2.1 Espacios vectoriales particulares.

El espacio $(R^2,+,R,\cdot)$ está conformado por el conjunto R^2 cuyos elementos son pares ordenados de números reales (x_1, x_2) representados de la siguiente forma:

$R^2 = \{ (x , y) /\ x , y \in R\}$

Las operaciones en R^2 de adición y multiplicación por escalar están definidas así:

$+: R^2 x \longrightarrow R^2\ R^2$

$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \longrightarrow (x_1+x_2 , y_1+y_2)$

$\cdot: RxR^2 \longrightarrow R^2$

$r.(x,y) \longrightarrow (r.x, r.y)$

Entonces el conjunto R^2 con la adición y multiplicación por escalar definidas hacen de R^2 un espacio vectorial.

Veamos la demostración:

Sean (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) pares ordenados del conjunto R^2 y r, u dos escalares de R, se tiene:

a) La adición es asociativa:

$(x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) + (x_2+y_3, y_2+y_3)$

- $= (x_1+(x_2+x_3)\ ,\ y_1+(y_2+y_3))$
- $= ((x_1+x_2)-x_3\ ,\ (y_1+y_2)+ y_3)$
- $= (x_1+x_2,y_1+y_2) + (x_3,y_3)$
- $= [(x_1+y_1) + (x_2,y_2)] + (x_3+y_3)$

b) Existe $\mathbf{0} \in R^2/ : \forall\ (x,y)\in R^2$ se cumple:

$(x,y) + (0,0) = (0,0) + (x,y) = (x,y)$

c) $\forall\ (x,y) \in R^2,\ \exists\ (-x, -y) \in R^2/$

$(x,y) + (-x,-y) = (-x,-y) + (x,y) = (0,0)$

d) La adición es conmutativa:

$(x_1,y_1) + (x_2,x_2) = (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y2)$

- $= (x_2 + x_1\ ,\ y_2 + y_1)$
- $= (x_2,y_2) + (x_1,y_1)$

Hemos verificado que $(R^2,+)$ es un grupo abeliano ahora veamos que la ley externa verifique lo siguiente:

e) $r(u(x,y)) = r(ux,uy) = (rux, ruy)$

- $= r.u\ (x,y)$

f) $(r+u)\ (x,y) = ((r,u).x, (r+u).y) = (r.x + ux, r.y + u.y)$

- $= (r.x, r.y)+(ux, uy)$
- $= r.(x,y) + u.(x,y)$

g) $r\ [(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] = r(x_1+x_2,y_1+y_2)$

- $= (r(x_1+x_2)\ ,\ r(y_1+y_2))$
- $= (rx_1+rx_2,ry_1+ ry_2)$
- $= (rx_1,ry_1)+(rx_2,ry_2)$
- $= r\ (x_1+y_1) + r\ (x_2+y_2)$

h) Existe $1\in R$, $1.\ (x,y) = (1.x,1.y) = (\ x\ ,\ y\ )$

Esto demuestra que la cuaterna (R^2, + , x , R) es un espacio vectorial.

Geométricamente a cada vector (x,y) de R^2 se le puede identificar con un punto del plano XY.

Aún más, para dar un sentido más geométrico a los elementos de este espacio vectorial, identifíquese al vector (x,y) $\in R^2$ con el segmento dirigido que tiene su punto inicial en el origen y su punto final en el punto (x,y):

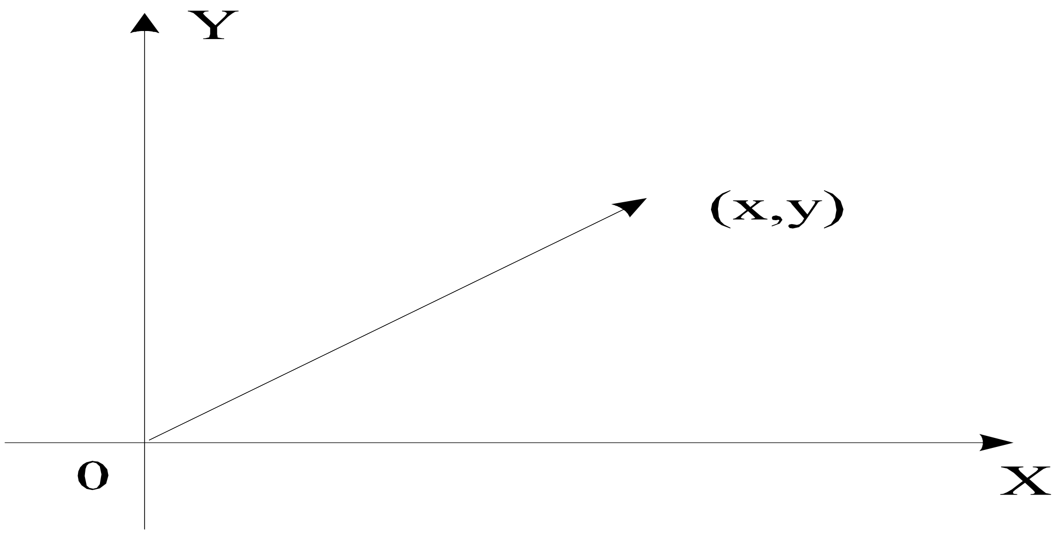


Figura 1. Representación de un espacio vectorial. Fuente: Autoría propia.

Observamos que el vector cero de R^2 es identificado con el origen del plano xy.

El espacio R^2 es entonces un espacio "que se puede ver" (geométricamente). Veamos ahora el carácter geométrico de las operaciones definidas en este espacio vectorial.

Sean $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ dos vectores de R^2. Se definió la suma de éstos como el vector v1 + v2 de R^2 de coordenadas $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Se afirma que ésta no es más que la definición abstracta de la "regla del paralelogramo" que se usa para sumar vectores en el plan

Veamos:

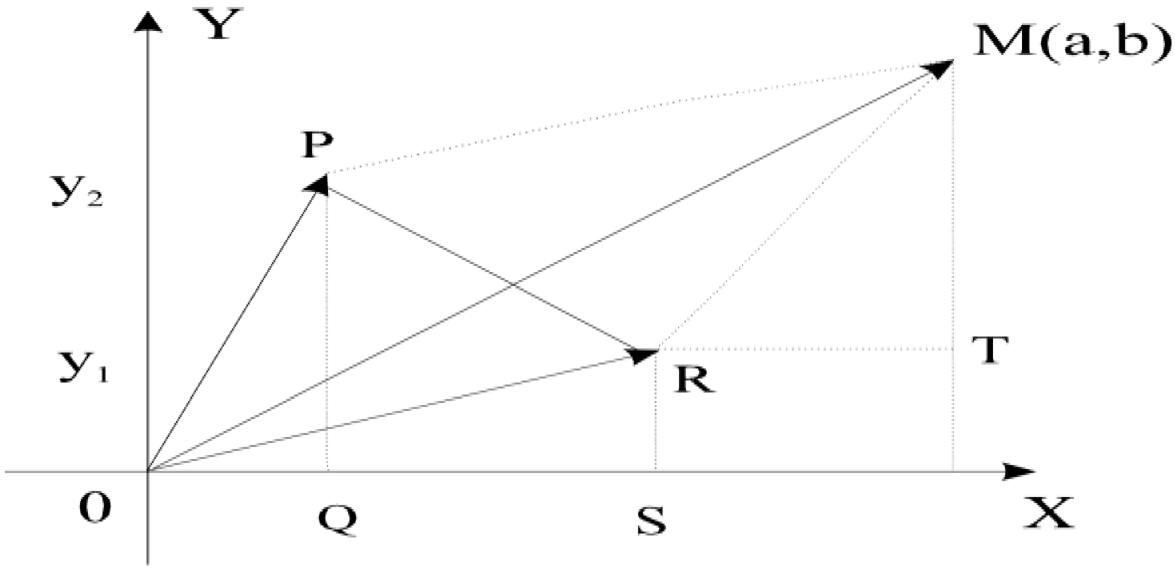


Figura 2. Regla del paralelogramo. Fuente: Autoría propia.

Sean (a,b) las coordenadas del vector suma de V_1 = OP y V_2 = OR obtenido geométricamente con la Ley del Paralelogramo.

De la figura es claro que:

$\overline{ON} = \overline{OS} = \overline{SN}$

Además, se observa que los triángulos OPQ y RMT son congruentes. Entonces:

$\overline{OQ} = \overline{RT} = \overline{SN}$

Por lo que:

$\overline{ON} = \overline{OS} = \overline{OQ}$

O sea: $a = x_1 + x_2$

Un argumento similar nos conduce a : $b = y_1 + y_2$. Lo que prueba la afirmación.

Consideremos ahora la multiplicación por escalares. Sea v = (x,y) ϵ R^2. Se ha definido la multiplicación de v por el escalar r ϵ R como el vector r.v ϵ R^2 de coordenadas (r.x, r.y). El efecto geométrico de esta operación consiste en, sin salir de la línea de acción del vector v:

a. Reducir su tamaño en un factor r conservando su sentido ($0 < r < 1$) (fig. A).

b. Aumentar su tamaño en un factor r conservando su sentido ($r > 1$) 8FIG. B).

c. Cambiar su sentido (r < 0) (fig. C).

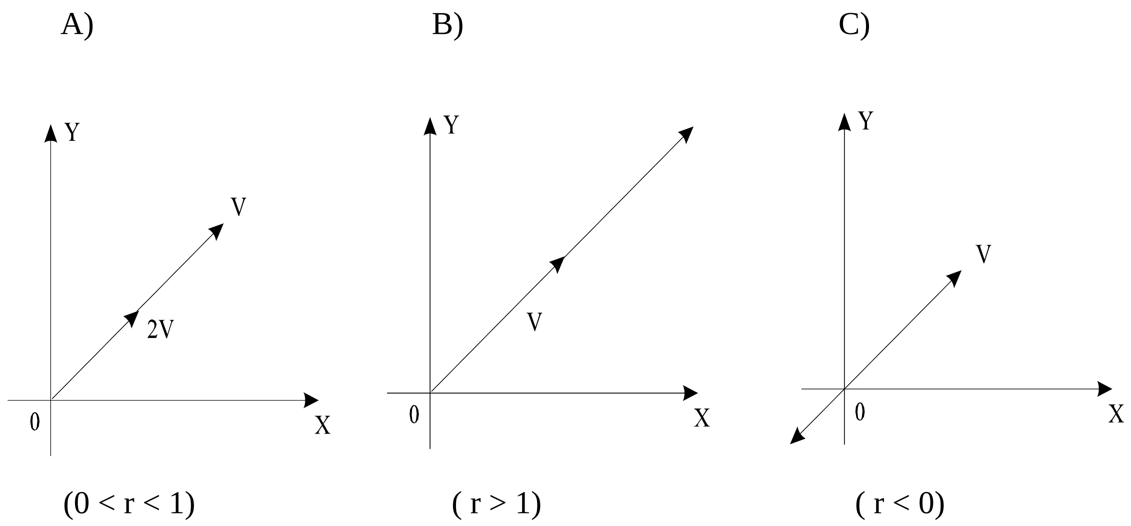


Figura 3. Representación, línea de acción del vector. Fuente: Autoría propia.

En efecto, veamos el caso particular r > 0. Sean (a,b) las coordenadas del vector r.v. El vector r.v se obtiene geométricamente colocando sobre v (con su mismo sentido) el vector cuyo tamaño sea r veces el tamaño de v. En la figura, localicemos el punto Q sobre la dirección de OP de modo que:

$$\overline{OQ} = \lambda\, \overline{OP}$$

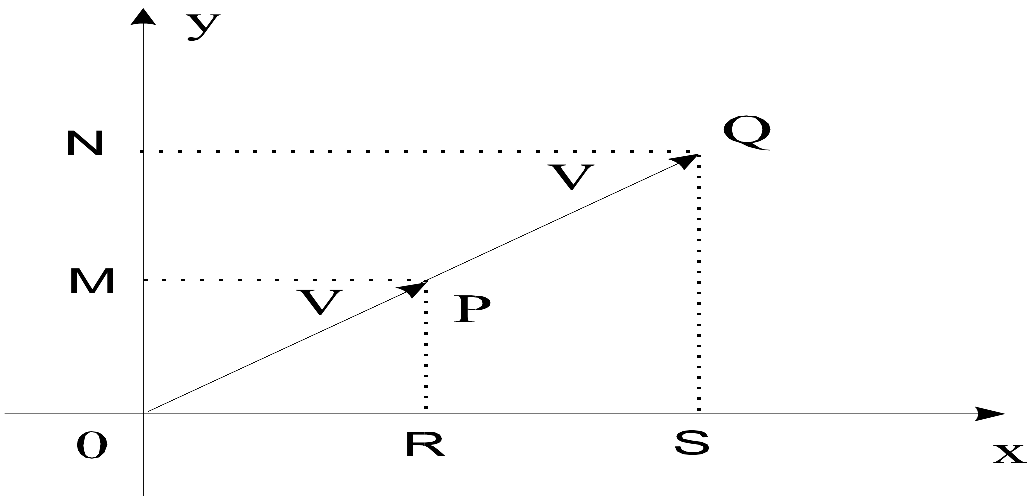


Figura 4. Localización del punto Q. Fuente: Autoría propia.

Los triángulos OPR y OQS (fig. D), son semejantes, de modo que:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \lambda$$

Lo que prueba que el vector r.v obtenido con la construcción geométrica anterior es el vector producto de v por el escalar r, según la definición de esta operación en R^2.

El espacio (R^3, +, x , R).

Este espacio está constituido por ternas ordenadas de reales: (x, y, z) con x, y, z ϵ R. O sea: $R^3 = \{ (x, y, z) / x, y, z \in R\}$.

Las operaciones de espacio vectorial se ven en este caso como:

Adición:

$+ : R^3 \times R^3 \longrightarrow R^3$

$((x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2)) \longrightarrow (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

Multiplicación por un escalar:

$\cdot : R \times R^3 \longrightarrow R^3$

$r.(x, y, z) \longrightarrow (r.x, r.y, r.z)$

Verifiquemos que la cuaterna (R^3, +, x, R) denota un espacio vectorial.

Sean (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) elementos del conjunto R^3, y r, u dos escalares de R, se tiene:

a) La adición es asociativa:

$(x_1, y_1, z_1) + [(x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)]$

$= (x_1, y_1, z_1) + (x_2+x_3, y_2+y_3, z_2 + z_3)$

$= (x_1 +(x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3), z_1 + (z_2 + z_3))$

$= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3, (z_1 + z_2) + z_3)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) + (x_3, y_3, z_3)$

$= ((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) + (x_3, y_3, z_3)$

b) Existe $\Theta = (0, 0, 0) \in R^3$/ para todo $(x_1, y_1, z_1) \in R^3$ se cumple:

$(x_1, y_1, z_1) + (0,0,0) = (0,0,0) + (x_1, y_1, z_1) = (x_1, y_1, z_1)$

c) Para todo $(x, y, z) \in R^3$, existe $(-x, -y, -z) \in R^3$ que verifica

$(x, y, z) + (-x, -y, -z) = (-x, -y, -z) + (x, y, z) = (0, 0, 0) = \Theta$

d) La adición es conmutativa:

$(x_1, y_1, z_1) +(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 +z_2)$

$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 +z_1) = (x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1)$

Estos 4 puntos verifican que $(R^3, +)$ es un grupo abeliano.

Ahora verifiquemos que la ley externa cumpla con lo siguiente:

e) $r [u (x_1, y_1, z_1)] = (r.u) (x_1, y_1, z_1)$ en efecto

$= r (u.x_1, u.y_1, u.z_1)$

$= (r.u.x_1, r.u.y_1, r.u.z_1)$

$= (r.u) (x_1, y_1, z_1)$

f) $(r + u) (x_1, y_1, z_1) = r.(x_1, y_1, z_1) + u.(x_1, y_1, z_1)$

$= (r + u) x_1, (r + u) y_1, (r + u) z_1)$

$= (r.lx_1 + u.x_1, r.y_1 + u.y_1, r.z_1 + u.z_1)$

$= (r.x_1, r.y_1, r.z_1) + (u.x_1, u.y_1, y.z_1)$

$= r (x_1, y_1, z_1) + u (x_1, y_1, z_1)$

g) $r ((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = r (x_1, y_1, z_1) + r. (x_2, y_2, z_2)$

En efecto pues:

$r [(x_1, y_2, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] = r (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$= (r. (x_1 + x_2), r. (y_1 + y_2), r. (z_1 + z_2))$

$= (r x_1 + r x_2, r y_1 + r y_2, r z_1 + r z_2)$

$= (r x_1, r y_1, r z_1) + (r x_2, r y_2, r z_2)$

$= r (x_1, y_1, z_1) + r (x_2, y_2, z_2)$

h) Existe $1 \in R$, $1.(x_1, y_1, z_1) = (1.x_1, 1.y_1, 1.z_1) = (x_1, y_1, z_1)$

Esto demuestra que (R^3, +, R, **.**) es un espacio vectorial.

Cada vector (x, y, z) de este espacio se puede identificar con el vector (geométrico) en el espacio tridimensional cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto final es el punto de coordenadas (x, y, z).

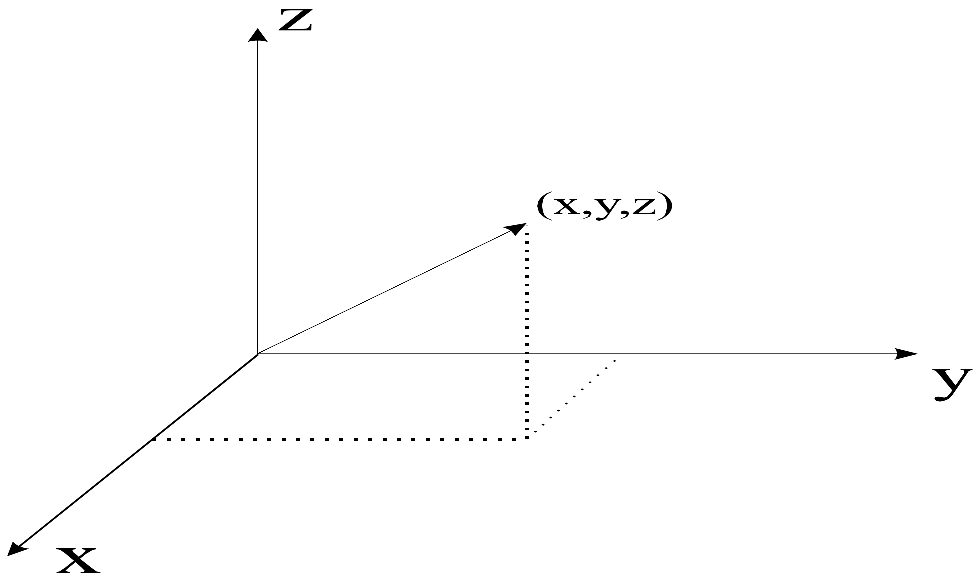


Figura 5. Espacio vectorial. Fuente: Autoría propia.

Las propiedades geométricas discutidas para el espacio vectorial (R^2, +, x, R) se tienen también en este espacio: La suma de vectores en R^3 se hace de acuerdo a la regla del paralelogramo, la multiplicación por escalares tiene el efecto geométrico de alterar el tamaño del vector dejándolo con el mismo sentido (r > 0) o, invirtiendo el sentido (r < 0).

El espacio (R^n, +, x, R).

Este espacio vectorial es uno de los más importantes, pues muchos de los espacios vectoriales que se estudian, son "equivalentes" a este espacio. El conjunto de vectores en este espacio es:

$R^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) / x_i \in R, i = 1,2, 3, ..., n\}$

Al vector $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ se le denotará simplemente como x. Es decir, se

$x = (x_1, x_2, ...x_n)$. A los reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se les llamará coordenadas o componentes del vector x. En forma similar se escribirá: $y = (y_1, y_2,..., y_n)$, $z = (z_1, z_2,...., z_n)$, etc, para denotar otros vectores de este espacio.

Se define en R^n la adición de los vectores.

$x = (x_1, x_2,...., x_n)$, $y = (y_1, y_2,...., y_n)$ de la siguiente manera:

$+: R^n \times R^n \longrightarrow R^n$

$(x, y) \longrightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

Además, la multiplicación del vector $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ por el escalar $r \in R$:

$.: R \times R^n \longrightarrow R^n$

$(r, x) \longrightarrow (r.x_1, r.x_2, ..., r.x_n)$

Verificaremos que la terna $(R^n, +, R,.)$ con estas operaciones es un espacio vectorial.

Sean $x = (x_1, x_2, \ldots,x_n)$, $y = (y_1, y_2,....,y_n)$ y $z = (z_1, z_2,.., z_n)$ tres vectores cualesquiera de R^n y r, u dos escalares de R. Se tiene:

a) La adición es asociativa pues:

$x + (y + z) = (x_1, x_2,..., x_n) + (y_1+z_1, y_2+z_2,..., y_n+z_n)$

$= (x_1 + (y_1+ z_1), x_2 + (y_2 + z_2),..., x_n+ (y_n + z_n))$

$= ((x_1 + y_1)+ z_1, (x_2 + y_2)+ z_2,...,(x_n+y_n) +z_n)$

$= (x_1+ y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) + (z_1, z_2,...,z_n)$

$= (x + y) + z$

b) Existe el cero en R^n, denotado por:

$O = (0,0,0....,0)$ que verifica para todo $x \in R^n$ lo siguiente:

$x + O = (x_1+0, x_2+0,...,x_n+0) = (x_1,x_2,..,x_n) = x$

c) Para todo $x \in R^n$, existe $(-x) \in R^n$ tal que $x+(-x) = 0$ en donde

$x = (-x) = (-x_1, - x_2, ..., -x_n) \in R^n$.

Por lo tanto:

$x + (-x) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2, .., x_n - x_n) = (0,0,...,0) = O$

d) La adición es conmutativa: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, ..., y_n + x_n)$

$= y + x$

Con estos 4 puntos verificamos que $(R^n, +)$ es un grupo abeliano.

Además de ello, la ley externa satisface:

e) $r\,(m\,x) = r\,(m\,x_1, m\,x_2, ..., m\,x_n)$

$= (r\,m\,x_1, r\,m\,x_2, ..., r\,m\,x_n)$

$= (r.m)\,(x_1, x_2, ..., x_n)$

$= (r\,m)\,x$

f) $(r+m)\,x = ((r+m)\,x_1, (r+m)\,x_2, ..., (r+m)\,x_n)$

$= (r.x_1 + mx_1, r.x_2 + mx_2, ..., r.x_n + m.x_n)$

$= (r.x_1, r.x_2 ... r.x_n) + (mx_1, mx_2 ..., mx_n)$

$= r\,(x) + m\,(x)$

g) $r.(x + y) = r\,(x_1 + y_1, y_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

$= (r.(x_1 + y_1), r.(x_2 + y_2), ..., r.(x_n + y_n))$

$= (r.x_1 + r.y_1, r.x_2 + r.y_2, ..., r.x_n + r.y_n)$

$= (r.x_1, r.x_2, ..., r.x_n) + (r.y_1, r.y_2, ..., r.y_n)$

$= r.x + r.y$

h) Existe $1 \in R$, $1.\,x = (1.\,x_1, 1.\,x_2, ..., 1.\,x_n)$

$= (x_1, x_2, ..., x_n)$

$= x$

Esto demuestra que la cuaterna $(R^n, +, x, R)$ es un espacio vectorial.

El espacio (M_{mxn}, +, R, .).

Sea M_{mxn} el conjunto de todas las matrices de orden m x n. Es decir:

$M_{mxn} = \{A = (a_{ij})$, $i=1,...,m$ / $a_{ij} \in R$, $i=1,...,n$ }.

Las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar en el conjunto M_{mxn} están definidas por**:**

$+ : \quad M_{mxn} \times M_{mxn} \longrightarrow M_{mxn}$

$(A , B) \longrightarrow +(A,B) = A + B$

$. : R \times M_{mxn} \longrightarrow M_{mxn}$

$(a , A) \longrightarrow a . A$

La cuaterna (M_{mxn}, +, R, .) verifica la estructura de espacio vectorial.

Veamos:

Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ tres matrices cualesquiera de M_{mxn} y r, m dos escalares de R, se tiene:

a) La adición es asociativa

$A+(B+C) = (a_{ij}) + [(b_{ij}) + (c_{ij})]$

$= (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij}))$

$= (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})$

$= (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij})$

$= [(a_{ij}) + (b_{ij})] + (c_{ij})$

$= (A + B) + C$

b) Existe $(0_{ij}) \in M$ / Para todo $(a_{ij}) \in M_{mxn}$ se cumple:

$(a_{ij}) + (0_{ij}) =(0_{ij}) + (a_{ij}) = (a_{ij})$

c) Para todo $(a_{ij}) \in M_{mxn}$, existe $(-a_{ij}) \in M_{mxn}$ tal que:

$(a_{ij}) +(-a_{ij}) =(-a_{ij}) + (a_{ij}) = (0_{ij})$

d) La adición es conmutativa:

$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij})$

Además, la ley externa satisface lo siguiente:

e) $r\,(m\,A) = ma\,(ma_{ij}) = (r.m\,a_{ij})$

$= (r.m)\,(aij)$

f) $(r + m)\,A = (r + m)\,(aij) = ((r + m)\,aij) = (r\,aij + m\,aij)$

$= (r\,aij) + (m\,aij) = r\,(aij) + m\,(aij)$

$= r.A + m.A$

g) $r\,[(a_{ij}) + (b_{ij})] = r\,(a_{ij} + b_{ij}) = (r\,a_{ij} + r\,b_{ij})$

$= r\,(a_{ij}) + r\,(b_{ij})$

h) Existe $1 \in R$, $1.\,A = 1.\,(a_{ij}) = (a_{ij}) = A$

Lo que verifica que la cuaterna (M_{mxn}, +, R, .) es un espacio vectorial.

El espacio (Pn, +, x, R).

Sea Pn el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n. Es decir:

$Pn = \{\, a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + an\ x^n \,/\, a_o, a_1, ..., a_n \in R \}$.

En este conjunto se define la adición de polinomios de la siguiente manera:

Si $p_1 = a_o + a_1x + ... + an\ x^n$ y $p_2 = b_o + b_1x + ... + bn\ x^n$

$+ :\ Pn \times P_n \longrightarrow P_n$

$p_1 + p_2 \longrightarrow p_1 + p_2 = (a_o + b_o) + (a_1 + b_1)\,x + ...$

Además de la multiplicación de p_1 por r:

$.\ :\ R \times Pn \longrightarrow Pn$

$(r, p_1) \longrightarrow r.p_1 = r.a_o + r.a_1 x\ \ldots + r.a_n\ x^n$

Podemos verificar fácilmente que (P_n , + , x , R) es un espacio vectorial.

Veamos:

Sea;

$p_1 = a_o + a_1x + ... + a_n x^n$

$p_2 = b_o + b_1x + ... + b_n x^n$, y

$p_3 = c_o + c_1x + ...+ c_n x^n$ del espacio vectorial (P_n, +, R, .)

a) La adición es asociativa pues $p_1 + (p_2 + p_3) = (a_o + a_1x+ ...+anx^n) + ((b_o + c_o) + (b_1 + c_1) x+ ...+ (bn + cn) x^n)$

$= (a_o + (b_o + c_o) + (a_1 + (b_1 + c_1)) x + ... \; ... + (a_n + (b_n + c_n)) x^n$

$= ((a_o + b_o) + c_o) + ((a_1 + b_1) + c_1)) x + ... + ((a_n + b_n) + c_n)) x^n$

$= (a_o + b_o) + (a_1 + b_1)x +...+ (a_n + b_n) \; x^n + ... \; . + c_o + c_1x+ ...+ cnx^n$

$= (p_1 + p_2) + p_3$

b) Existe el 0 en P_n, denotado por $0 = 0 + 0x+ ... + 0x^n$, que verifica que para todo $p_1 \in P_n$,

Se cumple:

$p_1 + 0 = (a_o + a_1x+ ... +an x^n) + (0+ 0x +...+ 0x^n)$

$= (a_o + 0) + (a_1 + 0) x+...+ (an + 0) x^n$

$= a_o + a_1x+ ... +an x^n$

$= p_1$

c) Para todo $p_1 \in P_n$, existe $(-p_1) \in Pn$ tal que:

$p_1 + (-p_1) = (-p_1) + p_1 = 0 = 0 + 0x + …….. + ox^n$ el polinomio $(-p_1)$ es denotado por:

$-p_1 = -a_o - a_1x -... - an x^n$

d) La adición es conmutativa pues:

$p_1 + p_2 = (a_o + a_1 x + ... + a_n x^n) + (b_o + b_1 x+...+b_n x^n)$

$= (a_o + b_o) + (a_1 + b_1) x+ ...+ (a_n + b_n) x^n$

$= (b_o + a_o) + (b_1 + a_1) x+ ...+ (b_n + a_n)x^n$

$= (b_o + b_1 x + ... + b_n x^n) + (a_o + a_1 x+...+ a_n x^n)$

$= p_2 + p_1$

Con esto verificamos que $(P_n, +)$ es un grupo abeliano.

e) La ley externa también verifica lo siguiente

$r (m p_1) = r (m (a_o + a_1 x+ ...+a_n x^n) = r (m a_o + m a_1 x + ... + m a_n x^n)$

$= (r m a_o + r m a_1 x+...+ r m a_n x^n) = (r m) (a_o + a_1 x+ ... + a_n x^n)$

$= (r.m) p_1$

f) $(r + m) p_1= (r + m) (a_o + a_1 x +...+ a_n x^n)$

$= (r + m)a_o + (r + m) a_1x +...+(r + m) a_n x^n$

$r a_o + m a_o + r a_1 x + m a_1 c + ...+r a_n x^n + m a_n x^n$

$= r (a_0+ a_1x+...+ a_n x^n) + u (a_0+ a_1x +...+ a_n x^n)$

$= r p_1 + u p_1$

g) $r (p_1+ p_2) = r [(a_0 + b_0) + (a_1+b_1) x +... + (a_n + b_n) x_n)$

$= (r (a_o+ b_o) + r (a_1+ b_1) + ...+ r (a_n+ b_n) x^n)$

$= (r a_o + r b_o + r a_1x + r b_1 +...+ r ax^n + r b_n x^n)$

$= r (a_o+ a_1x+...+ a_n x^n) + r (b_o+ b_1x+...+ b_nx^{n)}$

$= r p_1 + r p_2$

h) Existe $1 \in R$, $1. p_1 = 1. (a_o + a_1x + ...+ a_n x^n)$

$= (1.a_o + 1.a_1 x+ .... + 1.a_n x^n)$

$= (a_o + a_1 x + ...+ a_n x^n) = p_1$

1.3 Subespacios generados

1.3.1 Definición.

Es V espacio vectorial y W subconjunto no vacío de V. Se dice que W es subespacio de V, si W es por sí mismo un espacio vectorial con las operaciones de adición y multiplicación por escalar que estaban definidas en V.

Ejemplos:

a) Sea V el espacio vectorial R^2. Sea W el subconjunto de R^2 formado por todos aquellos (x, y) que tienen su segunda coordenada positiva, Es decir:

W = { (x, y) / x, y ϵ R, y > 0}.

Los cálculos entre los datos de W son las que estaban definidas en R^2, es decir: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; r (x,y) = (r.x, r.y).

Ahora veamos si (W, +, R, ·) es un espacio vectorial.

En este caso podemos afirmar que no es un espacio vectorial, porque la multiplicación por escalar no es cerrada, es decir:

.: $R \times W \longrightarrow W$; $[r, (x, y)] \longrightarrow (r.x, r.y)$

Aquí vemos que para un valor de r < o, el vector (r.x, r.y) no pertenece a W pues siendo y > o, se tendría r.y < o .

Consecuencia de este hecho es que dado un vector (x, y) en W, éste no tiene (en W) inverso aditivo. Geométricamente, esto se ve como:

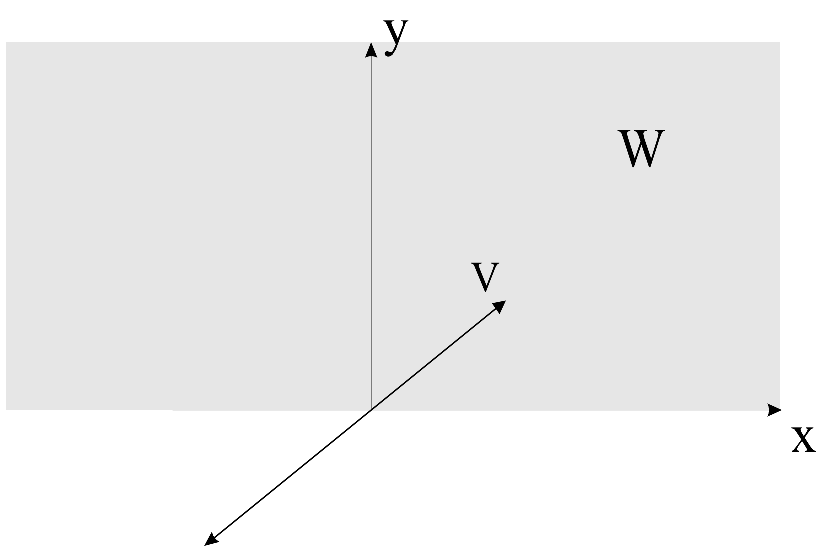


Figura 6. Representación geométrica. Fuente: Autoría propia.

b) Sin embargo, si W es el siguiente subconjunto de R^2

$W = \{(x, y) / x, y \in R, y = 2x\}$

(o sea, W es el subconjunto de pares ordenados de la forma (x, 2x), donde $x \in R$) en este caso podemos observar que W es un espacio vectorial en las operaciones usuales de R^2.

La verificación de que la cuaterna (W, +, R, .) es un espacio vectorial, es muy sencilla. Veamos, primero tenemos que ver si las operaciones de adición y multiplicación por escalar son cerradas en W.

Si tenemos dos vectores de W: (x_1, y_1) y (x_2, y_2) entonces:

La adición será:

$+ : W \times W \longrightarrow W$

$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \longrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ .... (1)

El vector $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ pertenece a W pues:

$y_1 = 2x_1$, $y_2 = 2x_2$

$x_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2)$ reemplazando este valor en (1), $[x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)] \in W$

La multiplicación por escalar está dada por:

$\cdot : R \times W \longrightarrow W$

$(r, (x_1, y_1)) \longrightarrow (r.x_1, r.y_1)$ .... (2)

Pero por definición de W, se sabe que: $y_1 = 2x_1$ entonces $r.y_1 = r.(2x_1) = 2(r.x_1)$ reemplazando en (2): $(r.x_1, 2(r.x_1))$ que es un vector de W tenemos.

Con esto observamos que tanto la adición como la multiplicación por escalar son operaciones cerradas en W.

Pasaremos a ver ahora un teorema que nos permite verificar si un subconjunto de un espacio vectorial constituye también un espacio vectorial, sin la necesidad de verificar los axiomas de la definición de espacio vectorial:

A) Condición suficiente para la existencia de subespacios.

En principio para poder saber si un subconjunto W del espacio vectorial V, es subespacio de éste o no, habría que verificar la cerradura de las operaciones en W y los axiomas que definen a un espacio vectorial en el subconjunto W.

Sin embargo, el siguiente teorema dice que tal verificación requiere de mucho menos trabajo.

B) Operaciones con subespacios.

Sean W_1 y W_2 dos subespacios del espacio vectorial V Consideremos lo siguiente:

a) La intersección de W1 y W2

$W_1 \cap W_2 = \{v \in V / v \in W_1 \text{ y } v \in W_2\}$

b) La unión de W1 y W2

$W_1 \cup W_2 = \{v \in V / v \in W_1 \text{ ó } v \in W_2\}$

c) La adición de W_1 y W_2 denota por $W_1 + W_2$, definida por:

$W_1 + W_2 = \{v \in V / v = w_1+w_2;\ w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$

Es natural preguntarse si $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cap W_2$ y (W_1+W_2) son subespacios de V.

C) Verificaremos que $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V.

Vemos que $W_1 \cap W_2$ es no vacío (contiene al cero) y si $x, y \in W_1 \cap W_2$ y $r \in R$ entonces:

a) $x, y \in W_1$ y $x, y \in W_2$ por ser W_1 y W_2 subespacios de V, se tiene:

$x+y \in W_1$ y $x+y \in W_2$ o sea $x+ y \in W_1 \cap W_2$

b) $r \in R$, $x \in W_1 \cup W_2$; $r.\ x \in W_1 \cap W_2$

ya que: $x \in W_1 \cap W_2$

$x \in W_1$ y $x \in W_2$

$r \in W_1$ y $r \in W_2$

$r.\ x \in W_1 \in W_2$

Lo que prueba que $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V.

Por otra parte, la unión de dos subespacios de V no es en general un subespacio de V la siguiente figura ilustra este hecho (siendo V el espacio R^2).

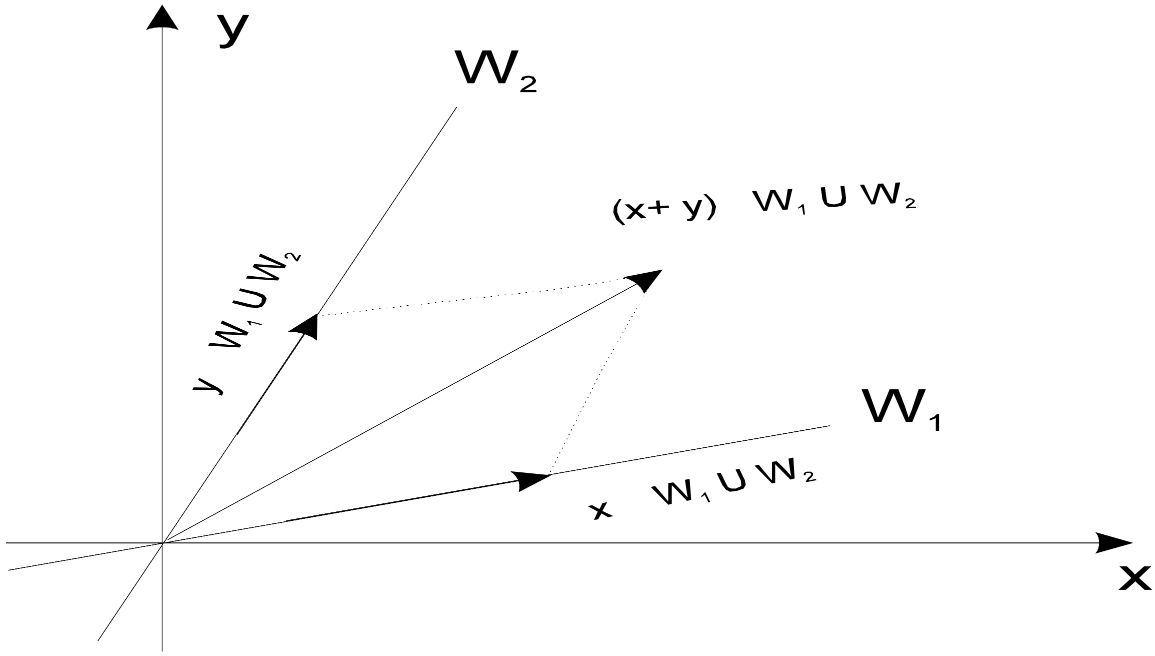


Figura 7. Unión de dos espacios subespacios de V. Fuente: Autoría propia.

Además, la adición de W_1 y W_2 denotada por $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.

Demostración:

Si: $x, y \in W_1 + W_2$ y $r \in R$ entonces existen $w_1, w_1' \in W_1$

y $w_2, w_2 \in W_2$, tales que:

$x = w_1 + w_2$

$y = w_1' + w_2'$

Al hacer la adición de x con y se obtiene el vector:

$x+y = (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = (w_1 + w_1') + (w_2 + w_2')$

pero $w_1 + w_1' \in W_1$ y $w_2 + w_2' \in W_2$, pues tanto W_1 como W_2 son subespacios de V.

Esto demuestra que $x+y \in W_1 + W_2$

De manera similar, se tiene:

$r.x = r.(w_1 + w_2)= r.w_1 + r.w_2$, en donde $r.w_1 \in W_1$ y $r.w_2 \in W_2$ de modo que

$r.x \in W_1 + W_2$; con lo que se concluye que $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.

Un caso particular importante se presenta cuando los subespacios W_1 y W_2 son disjuntos, es decir, si $W_1 \cap W_2 = \{ \emptyset \}$. En esta situación, el subespacio

$W=W_1+W_2$ recibe el nombre de suma directa de W_1 y W_2, y se denota:

$W = W_1 + W_2$

Resumimos esto es la siguiente definición:

$W = W_1 + W_2$ sii $W = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{ \emptyset \}$.

D) Algunos subespacios vectoriales de r^2 y r^3.

Los únicos subespacios de R^2 son $\{ \emptyset \}$, R^2 y las rectas que pasan por el origen.

Considérese el conjunto L de R^2 dado por: $L = \{ (x,y) \in R^2 \ / \ a x + b y = 0 \}$ en donde a y b son dos números reales fijos no ambos cero.

Se afirma que L es un subespacio de R^2.

En efecto, sean $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ dos vectores de L. Se tendrá que verificar que**:**

$u + v \in L$ y que $r.u \in L$ para $r \in R$.

Observamos que:

$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)= (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$a (x_1+x_2) + b (y_1+y_2) = (ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2)$

pues $(x_1,y_1) \in L$ pues $(x_2,y_2) \in L$

$a (x_1+x_2) + b (y_1+y_2) = 0$

Lo que significa que $u+ v \in L$.

Similarmente:

$r.u = (r.x_1, r.y_1)$

$a (r.x_1) + b (r.y_1) = r.(ax_1 + by_1) = r.0 = 0$

Lo que prueba que r.u $\in$ L.

Geométricamente el subespacio L es una recta en el plano XY que pasa por el origen.

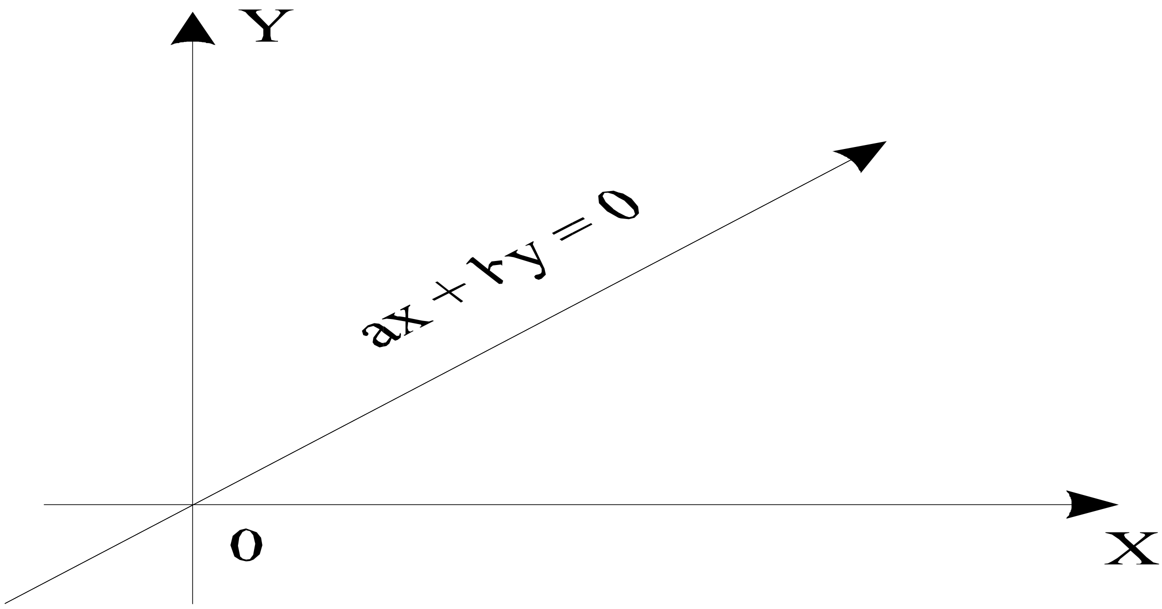


Figura 8. Representación recta en el plano XY. Fuente: Autoría propia.

Nota:

De acuerdo a lo desarrollado anteriormente, se observa que todo espacio vectorial V tiene al menos dos subespacios, a saber, el subespacio **{** 0 **}** y V mismo. A éstos se les llama subespacios triviales de V.

En el ejercicio anterior obser9vamos que L es un subespacio no trivial de R^2 y además se verifica que todo subespacio de R^2 no trivial es del tipo de L.

Al igual que en R^2, los subespacios de R^3 tienen un tipo definido.

En el espacio R^3 los únicos subespacios son: { 0 }, R^3, las rectas que pasan por el origen y los planos que pasan por el origen.

Considérese el subconjunto È de R^3 dado por:

E = { (x,y,z) / ax + by + cz = 0}

En donde a, b, c son tres números reales no todos iguales a cero. Se verifica fácilmente que satisface las condiciones a) y b) de la condición suficiente de subespacios. Este es pues un subespacio (no trivial) de R^3. Obsérvese que geométricamente È representa un plano en el espacio tridimensional que pasa por el origen:

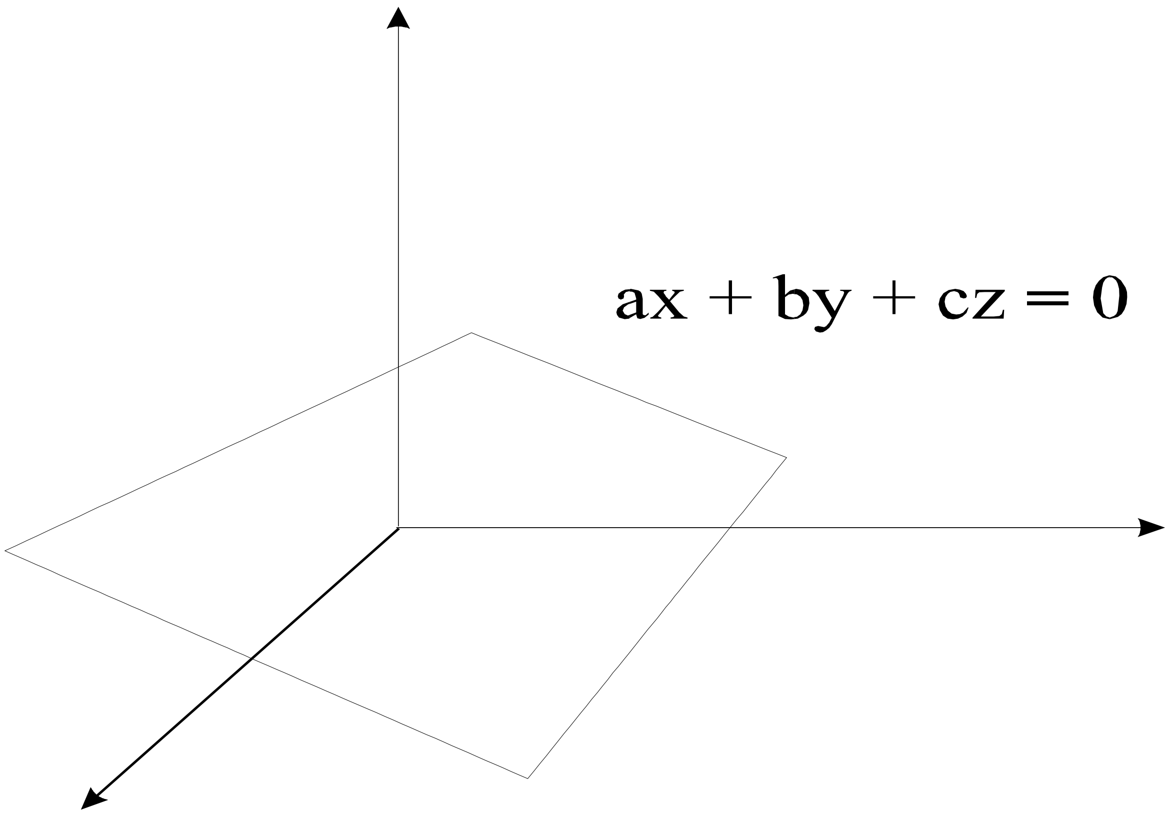
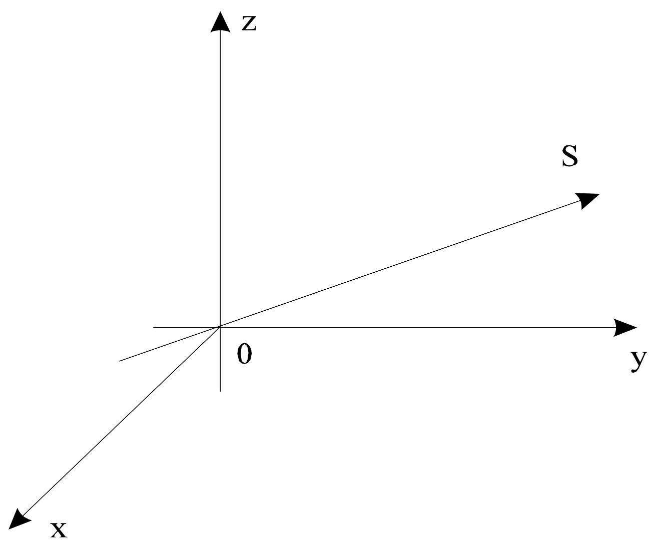


Figura 9. Representación de un plano. Fuente: Autoría propia.

Se puede ver también que el subconjunto de R^3:

S = { (x,y,z) / x = at, y = bt, z = ct, t ϵ R} es un subespacio de R^3.

Geométricamente, S representa una recta que pasa por el origen.



$x = at$

$y = bt$

$z = ct$, $t \in R$

Figura 10. Representación de una recta. Fuente: Autoría propia.

1.4 Dependencia e independencia lineal – Combinaciones lineales

1.4.1 Definición.

Dados dos vectores v_1 y v_2, diremos que v es vector y tiene combinación lineal en v_1 y v_2, si existen escalares a y b tales que:

$v = a\, v_1 + b\, v_2$

Ejemplo:

Demostrar que un par (x,y) es combinación lineal de los pares (0,1) y (1,0).

Demostración:

Para demostrar que el par (x,y) es combinación lineal de los pares (0,1) y (1,0) deben existir a y b tales que:

$(x,y) = a\,(0,1) + b\,(1,0) = (0,a) + (b,0) = (0+b, a+0)$

$(x,y) = (b,a)$ entonces $b = x$ y $a = y$

por tanto $(x,y) = y\,(0,1) + x\,(1,0)$

Pero el concepto de combinación lineal se puede generalizar para más de dos vectores.

1.4.2 Definición.

Sea V un espacio vectorial. Sean v_1, v_2,...,v_n vectores de V. Se dice que el vector v ϵ V es una combinación lineal de los vectores v_1, v_2,...,v_n; si existen escalares c_1, c_2,...,c_n tales que: $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ...+c_nv_n$, es decir , $v = \sum c_i v_i$

Ejemplos:

Por deducción el vector (14,12,2) en R^3 es combinación lineal de los vectores (1,2,-1) y (3,2,1) puesto que:

(14,12,2) = 2 (1,2,-1) + 4 (3,2,1)

decir si el vector V= (1,2,3) es combinación lineal de los elementos vectores v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,-1) , v_3 = (1,1,-2) de R^3.

Para saberlo debemos investigar si existen escalares reales a, b, q tales que:

$(1,2,3) = a\ v_1 + b\ v_2 + q\ v_3$

(1,2,3) = a (1,0,-1) + b (0,1,-1) + q (1,1,-2)

Al efectuar las operaciones tenemos:

(1, 2, 3) = (a, 0, -a) + (0, b, -b) + (q, q, -2q)

(1, 2, 3) = (a + q , b + q , -a - b - 2q)

Por igualdad de ternas:

a + q = 1

b + q = 2

- a - b - 2q = 3

Sumando las tres relaciones se tiene: 0=6, lo que es imposible,

En consecuencia, v no es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

1.4.3 Subespacios generados por un conjunto de vectores.

Sea V un espacio vectorial y sea S un subconjunto no vacío de V. Uno se pregunta si existe algún subespacio de V que contenga a S.

Observamos que, si S es un subespacio de V, la respuesta a nuestra pregunta es obvia:

S es un subespacio de V que contiene a S.

Aún más, aunque S no sea subespacio de V, el problema tiene una solución trivial: V es un subespacio de V que contiene a S.

Entonces tendríamos que imponer una condición extra a la pregunta sobre el subespacio procurado: uno se pregunta si existe algún subespacio de V que contiene a S, que sea "el más pequeño de todos". Es decir, si se considera el conjunto de todos los subespacios de V que contienen a S (que no es vacío, pues V está en él) uno se pregunta si existe algún elemento minimal (en el sentido de contención de conjuntos) en él.

Para poder dar respuesta a esta pregunta, consideremos el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de elementos de S. Denotemos por L(S) a este conjunto.

Entonces:

$L(s) = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots c_k v_k \,/\, v_i \in S,\ i = 1,..k,\ k \in N\}$.

Notamos entonces que cada elemento de L(S) es una combinación lineal de un número finito de elementos de S. Si S es finito, donde $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ entonces: $L(S) = \{ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots c_n v_n \,/\, c_i \in R,\ i = 1,..n \}$.

Demostraremos que L(S) es un subespacio de V y que además es el menor de todos los subespacios de V que contienen a los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Pero antes daremos el siguiente teorema:

Sea V un espacio vectorial, y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores de V. Entonces el conjunto: $L(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \{ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n \,/\, c_i \in R, i=1,..n \}$, formado por todas las combinaciones lineales de v_1, v_2,..., v_n es un subespacio de V, y además, es el menor de todos los subespacios de V que contienen a los vectores v_1, v_2, ……..., v_n.

Demostración:

Se denomina primero que $L(v_1,v_2,...,v_n)$ es un subespacio de V. Para esto verificaremos que $L(v_1,v_2,...,v_n)$ satisface las dos condiciones suficientes de subespacio:

a) Sean x, y ϵ $L(v_1,v_2,...,v_n)$. Entonces existen $c_1,c_2,...,c_n,d_1,d_2,...,d_n$ ε R tales que:

x = c1 v1 + c2 v2 + ... +cn vn y = d1 v1 + d2 v2 + ... +dn vn; al desarrollar la adición tenemos:

que demuestra que x + y ϵ $L(v_1,v_2,...,v_n)$

b) En forma similar, si r ϵ R se tiene

$r.x = r.(c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... +c_n v_n)$

$= (r \quad c_1) v_1 + (r c_2) v_2 + ... +(r c_n) v_n$

lo que prueba que r.x ϵ $L(v_1, v_2, ..., v_n)$.

Entonces L (v_1, v_2,. . ., v_n) es un subespacio de V, ciertamente L $(v_1,v_2,...,v_n)$ contiene a los vectores v_1, v_2, ..., v_n ,pues:

$v_i = 0.v_1 + ...+ 0.v_{i-1} + 1.v_i + ...+ 1.v_{i+1} + 0.v_n +...+ 0.v_n \ \epsilon \ L(v_1,v_2,...,v_n)$, i = 1,...,n

demostraremos ahora que $L(v_1,v_2,...,v_n)$ es el menor de los subespacios de V que contiene a los vectores v_1, v_2, . . . , v_n

Sea W un subespacio de V que contiene a v_1, v_2, . . . , v_n y sea $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n$ ϵ $L(v_1,v_2,...,v_n)$.

Por la condición de ser W un subespacio de V (aplicando las condiciones suficientes de subespacio) con los vectores $v_1,v_2,...,v_n$ ϵ W y los escalares $c_1,c_2,...,c_n$ se ve que x ϵ W.

Es decir:

$L(v_1,v_2,...,v_n) \in W$. Esto demuestra que $L(v_1,v_2,...,v_n)$ es el menor de los subespacios de V que contiene a los vectores $v_1,v_2,...,v_n$.

Ejemplo:

Sean $v_1= (1,3,-1)$ y $v_2= (2,1,3)$ dos vectores de R^3. Según la discusión anterior, el menor subespacio de R^3 que contiene a v_1 y v_2 es $L(v_1,v_2)$ donde:

$L(v_1,v_2) = \{ c_1(1,3,-1) + c_2(2,1,3) / c_1,c_2 \in R\}$

$= \{(c_1 + 2c_2, 3c_1 + c_2, -c_1 + 3c_2 / c_1, c_2 \in R\}$

$= \{ (x,y,z) / x=c_1+c_2 , y=3c_1+c_2 , z= -c_1+3c_2 / c_1,c_2 \in R\}$

1.4.4 Definición.

Sea V un espacio vectorial y sean v_1, v_2,...,vn vectores de V. Al subespacio $L(v_1,v_2,...,v_n)$ se le llama espacio generado por los vectores $(v_1,...,v_n)$.

En general, el subespacio $L(v_1, v_2,... , v_n)$ es diferente del espacio V, es decir, $L(v_1, v_2,..., v_n) \subset V$, tal como se vió en el ejemplo anterior $V = R^3$, $v_1 = (1,3,-1)$ y $v_2=(2,1,3)$. Sin embargo, puede ocurrir que $L(v_1,v_2,...,v_n)=V$.

En este caso se dirá que el espacio vectorial V es generado por los vectores $v_1,v_2,...,v_n$ y se llamará a estos los generadores de V:

Dependencia e independencia lineal.

Ejemplos:

Se afirma que los vectores $v_1=(1,3,2)$ $v_2(-1,2,5)$ y $v_3(0,1,4)$ en R^3 son linealmente independientes.

Para ver la validez de la afirmación, se tiene que considerar la combinación lineal de ellos (igualada al vector cero de R^3),

$c_1(1,3,2) + c_2(-1,2,5) + c_3(0,1,4) = (0,0,0) = \Theta$

y mostrar que esto implica que los 3 escalares son iguales a cero.

La combinación lineal anterior puede escribirse como (realizando las operaciones indicadas en el lado izquierdo de la igualdad):

$(c_1 - c_2, 3c_1 + 2c_2 + c_3, 2c_1 + 5c_2 + 4c_3) = (0,0,0) = \Theta$

De donde igualando las coordenadas correspondientes de estos dos vectores de R^3 se obtiene:

$c_1 - c_2 \quad = 0$

$3c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$

$2c_1 + 5c_2 + 4c_3 = 0$

El cual es un sistema homogéneo de 3 ecuaciones lineales para las incógnitas c_1, c_2, c_3.

Al resolver el sistema se obtiene que: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, lo que prueba la afirmación inicial.

Teorema:

Los n vectores $v_1, v_2, \ldots, v_3$ $(n>2)$ del espacio vectorial V son linealmente dependientes si, y sólo si al menos uno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los n -1 vectores restantes.

Demostración:

Si los n vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes, según la definición de dependencia lineal existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos nulos tales que:

$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = \Theta$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $c_1 \neq 0$. Entonces la expresión anterior puede escribirse como:

$$v_1 = \frac{-c2}{c1} v_2 + \cdots + \frac{cn}{c1} v_n$$

lo que muestra que el vector v_1 es una combinación lineal de los n-1 vectores v_2, v_3, . . . ……., v_n.

Recíprocamente, supongamos que al menos uno de los n vectores $v_1,v_2,v_3,...,v_n$ puede escribirse como combinación lineal de los n-1 vectores restantes.

Dígase que v_1 es tal vector. Se tiene entonces que existen escalares $d_2,...,d_n$ tales que:

$v_1 = d_2v_2 + ... + d_nv_n$

reescribimos esta operación como: $v_1 - d_2 v_2 - ... - d_n v_n = \Theta$

se ve que satisface la condición de vectores linealmente dependientes con

$c_1=1$ y $c_i = -d_i$, i = 2, 3, . . . , n.

A continuación, un teorema que recoge algunas consecuencias inmediatas de la definición de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores.

Teorema:

Sean $v_1, v_2, ..., v_n$, n vectores del espacio vectorial V.

Demostración:

a) Si $v_i = v_j$ para $i \neq j$, i, ,j = 1,2,...,n entonces estos valores son linealmente dependientes

b) Si existe i , 1 < i < n , tal que v.i = Θ, entonces estos vectores son linealmente dependientes.

c) Si el conjunto $\{ v_1, v_2, ..., v_n \}$ es linealmente independiente , entonces cualquier subconjunto de él es linealmente independiente.

d) Si el conjunto $\{ v_1, v_2, .., v_n \}$ es linealmente dependiente, entonces para cualesquiera vectores $w_1, w_2,... w_k$ en V , el conjunto $\{v_1, v_2, ...,v_n,w_1,...,w_k\}$ es linealmente dependiente.

Teorema:

Sean $V_j = (a_{1j}, a_{2j},..., a_{nj})$, $j = 1,2,...,n$, n vectores en R^n. Considérese la matriz A de orden n, $A=(a_{ij})$, $ij = 1,2,...,n$ (esto es, A es la matriz cuya j-ésima columna está constituida por las coordenadas del j-ésimo vector v_j, $j = 1,2,...,n$). Entonces los vectores $v_1,v_2,...,v_n$ son linealmente dependientes si, y solo si det(A)=0 (o equivalentemente, sí, y sólo si A es una matriz no inversible).

Por ejemplo, los vectores $V_1 = (2,3,5,-1)$, $V_2 = (0,3,-1,2)$, $V_3 = (0,0,4,8)$ y $V_4 = (0,0,0,5)$ en R^4 son linealmente independientes.

Sistema de generadores:

Si un conjunto no vacío de vectores de un espacio (V, +, K,.) es tal que todo vector de V puede expresarse como combinación lineal (C.L) de dicho conjunto. Entonces se dice que éste es un sistema de generadores de V. Esto equivale a decir que el subespacio de V generado por tal conjunto es el mismo V. El concepto de sistema de generadores (S.G) de un espacio vectorial "es independiente de la dependencia o independencia lineal del sistema. O sea, un sistema de generadores puede ser linealmente independiente o no" (Rojo, 1995, p.51).

1.4.5 Definición.

La familia $A = \{v_1, v_2,..., v_n\}$ es un sistema de generadores de V si, y sólo si todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de los vectores de A. O bien, "A es un sistema de generadores de V si, y sólo si el subespacio generado por A es V" (Rojo, 1995, p.52).

A es un S.G de V si y sólo si $L(A) = V$

Ejemplos:

a) El conjunto $A = \{ (1,0), (0,1), (1,1) \}$ es un sistema de generadores de R^2. ya que para cualquier, vector de $R^2(a,b)$, deben existir escalares a, b y g tales que:

$(1,0) + b\,(0,1) + g(1,1) = (a, b)$

O sea: $(a + b, b + g) = (a, b)$

Entonces:

$a + g = a \quad a = a - k \quad b + g = b \quad b = b - k$

$g = k, \quad k \in R$

b) Determinar si los vectores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ y $v3 = (1,0,0)$ de $(R^3,+,R,\cdot)$ constituyen un sistema de generadores de R^3.

El problema se reduce a investigar si existen escalares reales a, b y g tales que cualquiera que sea $(a, b, c) \in R^3$ se verifique:

$a\,(1,1,1) + b\,(1,1,0) + g\,(1,0,0) = (a, b, c)$

$(a+ b+ g, a+ b, a) = (a, b, c)$

$a + b + g = a\ ^3$

$a + b = b$ de donde resulta

$= c\ ^3 \quad a = c, b = b - c, g = a - b$

1.5 Bases y dimensión de un espacio vectorial

"El objetivo principal de esta parte del capítulo es precisar esta noción intuitiva de dimensión" (Gámez, 2001, p.12).

1.5.1 Definición.

Si V es cualquier espacio vectorial y $S = \{ V_1, V_2, \ldots, V_r \}$ es un conjunto finito de vectores en V, entonces S se denomina base para V si:

A) S es linealmente independiente.

B) S genera a V.

Ejemplos:

a) Sean $e_1 = (1,0,0,..,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0)$..., $e_n=(0,0,...,1)$ vectores de R^n, el conjunto formado por $e_1, e_2,...,e_n$ es una base de R^n, ya que:

- $S= \{e_1, e_2,...,e_n\}$ es Linealmente Independiente, ya que:

  $ae_1 + be_2 + ...ge_n = (0,0,0,...,0)$

  $a (1,0,...,0) + b (0,1,0,..,0)+ g (0,0,...,1) = (0,0,...,0)$ que es equivalente

  $(a, b, ..., g) = (0, 0,..., 0)$

  entonces: $a = b = ...= g = 0$

  Como consecuencia el conjunto $S =\{ e_1, e_2,...,e_n \}$ es linealmente independiente.

- S genera a V, dado que cualquier vector

  $V = (v_1, v_2,...,v_n)$ en R se puede escribir como:

  $V = e_1v_1 + e_2v_2 + ... + v_ne_n$

- S es una base de Rn. Esta base se conoce como base standard.

b) El conjunto $S = \{1, x, x^2,..., x^n\}$ es una base para el espacio vectorial Pn (conjunto de las funciones polinómicas) ya que:

- S genera a Pn. Dado que cada polinomio p de Pn se puede escribir como: $p = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$

  la cual es una combinación lineal de $1, x, x^2,...,x^n$.

- S es linealmente independiente:

  porque existen escalares $c_0, c_1,...,c_n$ tales que

  $c_0 + c_1x + ... + c_nx^n = 0$, vector cero en Pn de donde:

  $c_0 + c_n x + ... + c_n x^n = 0 + 0 x + ... + 0 x^n$ esto implica que $c_0 = c_1 = ... =c_n = 0$

  $S = \{1, x, x^2,..., x^n)$ es una base de Pn.

Capítulo II

Espacio cociente y transformaciones lineales

2.1 Espacio cociente

Dados ***u***, ***v*** ϵ **V** diremos que están relacionados módulo **S**, si ***u*** **-** ***v*** ϵ **S**. La relación anterior es una relación de equivalencia

2.2 Transformaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales en el mismo cuerpo K. Si se define una función τ de V en W, tal que se verifica lo siguiente:

$\tau : V \longrightarrow W$

$\tau (x + y) = \tau (x) + \tau (y)$

Ejemplo:

$\tau : R^3 \longrightarrow R^2$

$\tau (x + y) = \tau (x) + \tau (y)$

x, y ϵ R^3, entonces $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$

$\tau (x) = (x_1 , x_2) \in R^2$, $\tau (y) = (y_1, y_2) \in R^2$

a) Espacio de transformaciones lineales

Si tenemos dos espacios vectoriales **V** y **W** sobre el mismo campo **F**, nos preguntamos: ¿tiene sentido considerar el conjunto de todas las transformaciones lineales de **V** en **W**? La respuesta es afirmativa.

El conjunto de todas las transformaciones lineales de **V** en **W** cumple con las propiedades de espacio vectorial. Es decir que el conjunto de las transformaciones lineales de **V** en **W** es un espacio vectorial al que denominamos espacio vectorial de las transformaciones lineales. Esto quiere decir que una transformación se comporta como un vector.

2.3 Definición

Dados V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo campo F. Definimos:

$F_L(V, W) = \{f : V \rightarrow W / f$ es una transformación lineal$\}$

Extendemos la operación de adición en V y en W. Una tal función es un homomorfismo de V en W:

b) Ley interna de adición:

$\forall\, f; g \in F_L(V, W), (f + g)(x) = f(x) + g(x) \;\; \forall\, x \in V.$

$f + g$ es una transformación lineal:

para todo $x; y \in V$, se tiene que $(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y)$

$= f(x) + f(y) + g(x) + g(y)$

$= f(x) + g(x) + f(y) + g(y)$

$= (f + g)(x) + (f + g)(y)$:

por otro lado, para cada f, g $\in$F y todo $x \in V$ se cumple: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$= f(x) + g(x)$

$= [f(x) + g(x)]$

$= [(f + g)(x)]$:

la adición cumple las propiedades de grupo abeliano:

a) $f; g; h \in F_L(V, W)$, $(f + g) + h = f + (g + h)$.

b) $f; g \in F_L(V, W)$, $f + g = g + f$

c) $0 \in F_L(V, W)$, $\forall f \in F_L(V, W)$, $f + 0 = 0 + f$

d) $f \in F_L(V, W)$, $\forall f \in F_L(V, W)$ $f + (-f) = (-f) + f = 0$.

Así como la operación externa: multiplicación por un escalar de una transformación lineal. ***f*** es una transformación lineal.

Aplicación didáctica

Sesión de aprendizaje

I. Datos informativos:

- DRE : Puno
- UGEL : Melgar
- I.E.S. : "José María Arguedas" Balsapata
- AREA : Matemática
- GRADO Y SECCIÓN : 4° Única
- DURACIÓN : 2 Horas pedagógicas
- DOCENTE DEL ÁREA : Prof. Rudy Genaro CRUZ MARTINEZ

II. Título de la sesión:

Expresiones algebraicas detrás de las formas

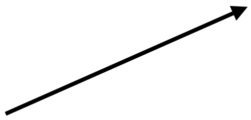
III- Aprendizajes esperados

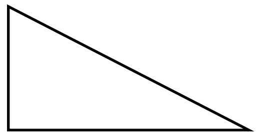
Competencia	Capacidades	Desempeños
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	❖ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas. ❖ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. ❖ Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales	▪ Representa a los diagonales de un paralelogramo que se cortan en el punto medio de cada diagonal y el uso de papiroflexia para demostrar las medianas. ▪ Elabora demostraciones algebraicas de desplazamiento resultante gráfica y analíticamente.
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	❖ Modela objetos con formas geométricas y sus trasformaciones ❖ Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas. ❖ Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio.	▪ Demuestra que las medianas de un triangulo se cortan en un punto situado a dos tercios del vértice o a un tercio dl lado que corta la mediana y el vector resultante en un paralelogramo y los ángulos correspondientes.
Campo temático	**⁕ Vectores, Ecuación lineal**	

IV. Secuencia didáctica: Inicio: (15 minutos)

- El docente pregunta: ¿Qué actividades realizamos la clase anterior? ¿Qué logramos aprender?

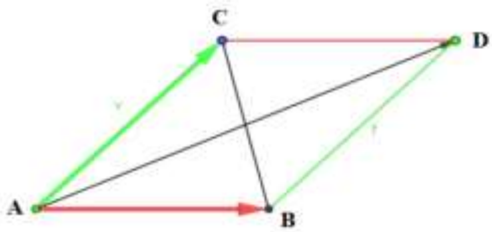
- Los estudiantes responden expresando ideas, se presenta a los estudiantes algunos diseños de figuras vectoriales. Estos diseños están hechos con materiales reciclables.



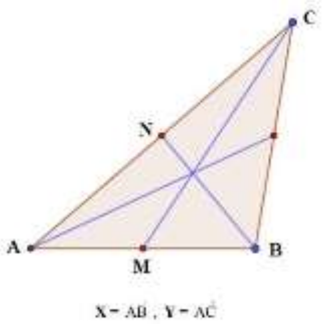


Desarrollo: (60 minutos)

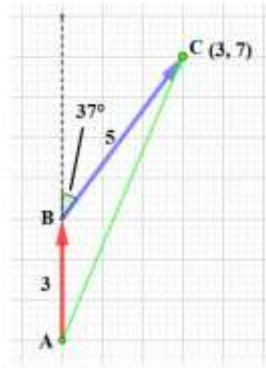
- Los estudiantes desarrollan la actividad 1. Conforme van reconociendo los diagonales de un paralelogramo, el docente los orienta en el uso de GEOGEBRA para hallar la gráfica del paralelogramo.



- Los estudiantes desarrollan la actividad 2. En el desarrollo de esta actividad, los estudiantes tienen que demostrar en un punto situado a dos tercios del vértice o a un tercio del lado que corta la mediana. El docente los orienta el uso de papiroflexia en la demostración de los mismos.

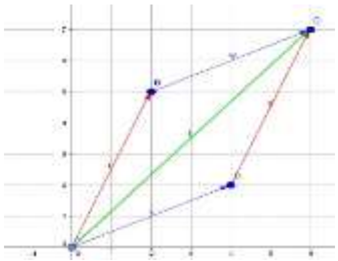


- En el desarrollo de esta actividad los estudiantes tienen que hallar que un automóvil parte de A hacia B y recorre 3 km hacia el Norte y luego 5 km hacia el Norte 37º Este, en el punto C. Representar estos desplazamientos y hallar el desplazamiento resultante gráfica y analíticamente, para lo cual el docente los orienta en el uso de GEOGEBRA para demostrar las coordenadas.



Cierre: (15 minutos)

El docente pide a los estudiantes que hagan uso de Geogeobra, y experimenten similares demostraciones y así mismo usen papiroflexia para determinar el punto de intersección de un segmento.



A continuación, el docente explica cómo se afianza en la demostración el uso de vectores en Geogebra, y cómo esto se debe a las condiciones de la situación.

V. Tarea a trabajar en casa:

* El docente solicita a los estudiantes que resuelvan las actividades similares.

VI. Materiales o recursos a utilizar:

- Fichas de actividades.
- Sotware GEOGEBRA
- Papel boom
- Reglas
- transportador
- Papelógrafos, plumos acrílica y pizarra.

Cantuta, diciembre del 2018.

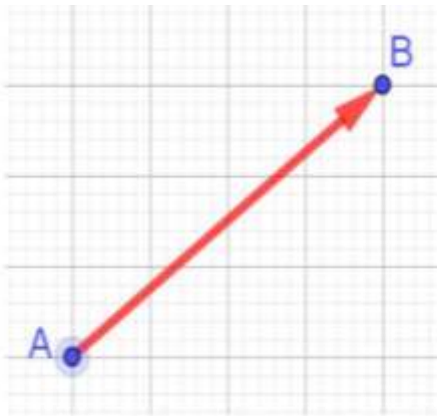
………………………………………….. …………………………………………………….

V°B° DIRECTOR **Prof. Rudy Genaro CRUZ MARTINEZ**

Hoja informativa: Los vectores en la educación secundaria

¿Qué es un vector?

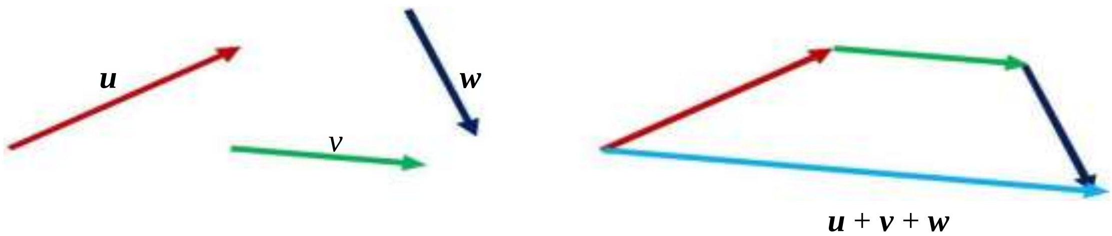
Uno de los extremos de un segmento se le llama origen y el otro extremo indica el sentido del vector. La recta que contiene al vector se le llama dirección del mismo y el tamaño o longitud del segmento constituye el módulo.



En el vector AB el punto A es el origen. El punto B es el extremo e indica el sentido. La dirección delo vector es la recta que contiene al vector o cualquier recta paralela a dicho vector. El módulo del vector AB es 5 unidades. Es un número positivo.

Suma de dos vectores

Para sumar dos o más vectores debemos poner sucesivamente que el origen de uno de ellos coincida con el extremo del primero.



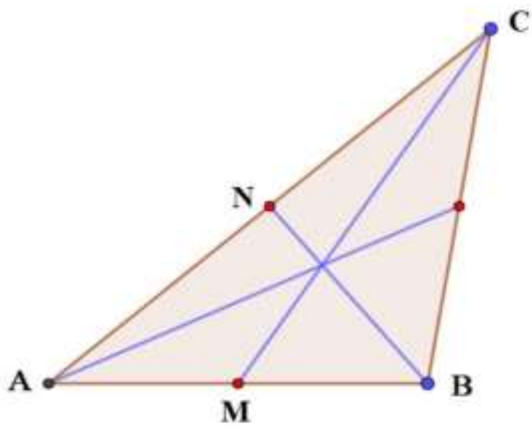
Producto de un número real por un vector

Cuando un vector se multiplica por un número real positivo se obtiene otro vector en la misma dirección y sentido cuyo módulo o longitud es igual al producto del número positivo por el módulo del primer vector. Si el número es negativo el vector es de sentido opuesto.

Problema

En un punto situado a dos tercios del vértice o a un tercio del lado que corta la mediana.

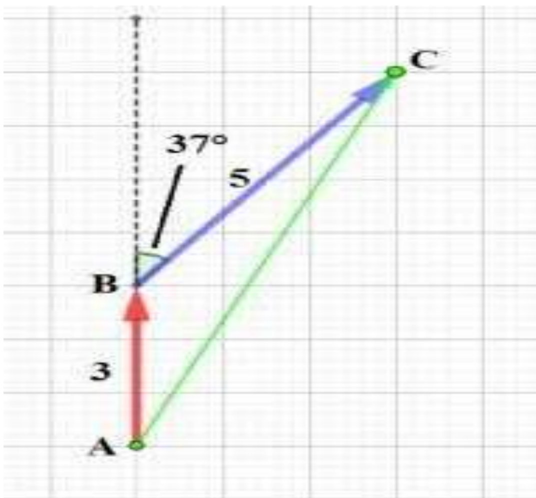
En el triángulo ABC, sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC.



X = A , **y** AC = B

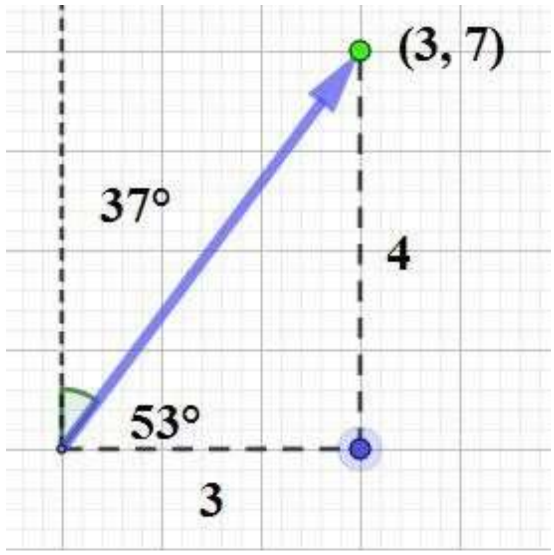
Problema

Un automóvil parte de A hacia B y recorre 3 km hacia el Norte y luego 5 km hacia el Norte 37º Este, en el punto C. Representar estos desplazamientos y hallar el desplazamiento resultante gráfica y analíticamente.



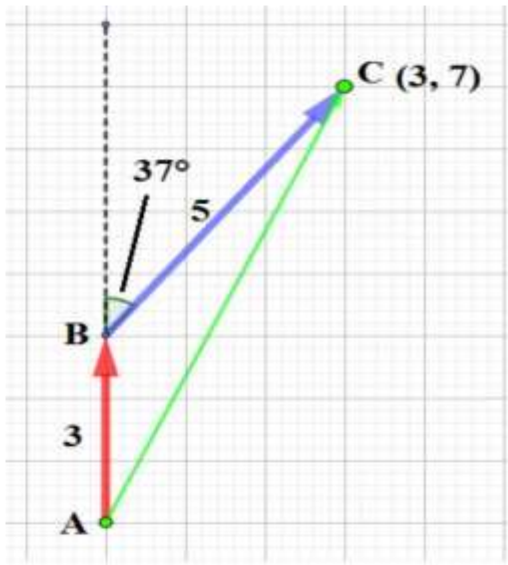
Si hacemos A como origen del sistema de coordenadas. A = (0, 0), B = (0, 3)

El punto C se obt iene a partir



Por lo tanto, el punto C tiene coordenadas: (3, 7)

Rehaciendo el gráfico inicial tenemos:



El punto C es el extremo del vector $\overrightarrow{AC}$ que es la suma de los vectores

El recorrido resultante es el módulo del vector AC .

Aplicando la ley del coseno

cos 143 = sen 37° = 0,8

El automóvil recorrió finalmente 7,6157 km. Aproximadamente 7 617 metros.

Síntesis

El trabajo de indagación académica corresponde al estudio de los espacios vectoriales. Según nuestra visión pedagógica: primero presentar las entidades matemáticas luego realizar una presentación más formal, es decir una estructura matemática (los espacios vectoriales).

Nuestro estudio comenzó con una propuesta intuitiva y empírica. El vector como segmento orientado posee origen, extremo, dirección sentido y longitud, esto permite representar magnitudes como: fuerza, velocidad, aceleración, desplazamiento, campo eléctrico, campo magnético.

En la primera parte abordamos los vectores en el espacio, ahí tratamos los segmentos orientados, dirección, sentido y módulo de un vector. Definimos los vectores equipolentes y vectores libres, así como la suma de vectores libres y el producto de un real por un vector libre.

Esto constituye la base mediante la cual se construirá la teoría formal.

Continua con la a estructura algebraica del espacio vectorial, conjunto provisto de una ley interna, notada aditivamente que goza de las propiedades de grupo abeliano y una ley externa sobre un campo F, que concretiza cuatro propiedades básicas.

Un aspecto central de los espacios vectoriales es el concepto de combinación lineal, que sirve. para definir los vectores linealmente dependientes y linealmente independientes. Finalmente se aborda los espacios cocientes a partir de una propiedad del subespacio.

Estudiamos las transformaciones lineales entre espacios vectoriales sobre una misma área.

La utilidad de las transformaciones lineales, permiten tratar los sistemas de ecuaciones lineales.

Apreciación crítica y sugerencias

Los espacios vectoriales son importantes para la matemática, pues permite resolver muchos problemas utilizando los vectores, soluciones distintas cuando se utiliza otras herramientas.

Las aproximaciones con rectas tangentes o planos tangentes en la solución de muchos problemas, fundamentalmente en el análisis dinámico permiten encontrar herramientas nuevas en la solución de problemas.

Para la enseñanza elemental, primaria y secundaria, los vectores permiten describir magnitudes vectoriales como fuerza, (la presión del aire, la fuerza del aire cuando vuela una cometa, o el esfuerzo de un nadador al realizar una prueba de natación etc.) Utilizando vectores podemos resolver problemas de desplazamiento, velocidad o aceleración.

En la educación superior su utilidad se da, no solo en las carreras de ingeniería, sino en muchos ámbitos de la ciencia y la tecnología.

En esta etapa muchos dibujos realizados en papel pueden ser escaneados para luego pasarlos a programas de dibujo vectorial.

Por tanto, sugiero se utilice estos programas como herramientas de diseño para vectorizar diversas imágenes.

Referencias

Aizpún, A. (1969). *Teoría y didáctica de la matemática actual*. Barcelona, España: Vicensvives.

Bourbaki, N. (1964). *Structures Alg*ébriques, Algèbre. Eléments de Mathematics, livre II. París: Hermann.

Dubreil, P. (1965). *Lecciones de Álgebra Moderna*. Barcelona: Reventé.

Font, V. (2003). *Matemáticas y cosas*, *Una mirada desde la educación matemática*.

Freudenthal, H. (2010). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica*. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino.

Gámez, A. (2001). *Separata del curso Algebra III.*

Herstein, I.N. (1970) *Álgebra Moderna*. México: Trillas.

Herramientas de diseño» *Vectorizar una imagen con Illustrator.* Recuperado de http//multimedia.uoc.edu › blogs › labeines › introduccio › vectorizar-una-.

Lang, S. (1971). *Álgebra*. Editorial Aguilar, Madrid.

Queysanne, M. (1971). *Álgebra Básica*. Barcelona: vicens-vives.

Rojo, A. (1996). *Álgebra I*. Buenos Aires: Librería Editorial El Ateneo.