UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN

Enrique Guzmán y Valle

Alma Máter del Magisterio Nacional

FACULTAD DE CIENCIAS

Escuela Profesional de Matemática e Informática

MONOGRAFÍA

CONJUNTOS

Enfoque axiomático de la teoría de conjuntos. La paradoja de Russell Inclusión. Conjunto de partes de un conjunto. Operaciones con conjuntos y sus propiedades. Resolución de problemas basado en conjuntos. Familia de conjuntos y operaciones básicas generalizadas. Partición y Cubrimiento.

Examen de Suficiencia Profesional Res. N° 1091-2021-D-FAC

Presentada por:

Tintaya Huallpa, Percy

Para optar al Título Profesional de Licenciado en Educación

Especialidad: Matemática e Informática

Lima, Perú

2021

MONOGRAFÍA

CONJUNTOS

Enfoque axiomático de la teoría de conjuntos. La paradoja de Russell Inclusión. Conjunto de partes de un conjunto. Operaciones con conjuntos y sus propiedades. Resolución de problemas basado en conjuntos. Familia de conjuntos y operaciones básicas generalizadas. Partición y Cubrimiento.

Designación de Jurado Resolución N° 1091-2021-D-FAC

Dra. Mesías Borja, Dora Escolástica
Presidente

Mg. Giles Nonalaya, Modesto Isidoro
Secretario

Lic. Dávila Huamán, Vicente Carlos
Vocal

Línea de investigación: Currículum y formación profesional en educación

Dedicatoria

A Dios, por darme la vida.

A mis padres, con mucho amor, por el apoyo, cariño y enseñarme a ser un hombre de bien.

A mis hermanos, que me acompañan y comprenden.

A los docentes de la UNE, por guiarme a la docencia.

A mis amigos y compañeros que partieron.

Índice de contenidos

Portada i

Hoja de firmas de jurado ii

Dedicatoria.. iii

Índice de contenidos iv

Lista de figuras vii

Introducción.. viii

Capítulo I. Enfoque axiomático de la teoría de conjuntos.. 9

1.1 Breve reseña de la teoría de conjuntos 9

1.2 Teoría axiomática de conjuntos.. 10

1.2.1 Términos primitivos 10

1.2.2 Términos definidos.. 11

1.2.3 Axiomas 11

1.2.4. Teorema.. 11

1.3 Lenguaje de la teoría de conjuntos 11

1.4 Nociones sobre el concepto de conjunto 12

1.5 Determinación de un conjunto.. 13

1.6 Axiomas de la teoría de conjuntos.. 14

1.6.1 Axioma de extensión 14

1.6.1.1 Definición de inclusión 14

1.6.1.1.1 Propiedades de la Inclusión.. 15

1.6.2 Axioma de existencia 15

1.6.2.1 Teorema.. 15

1.6.3 Axioma de separación 16

1.6.3.1 Definición de intersección.. 17

1.6.4 Axioma del par 17

1.6.5 Axioma de la unión 17

1.6.6 Axioma de las partes 18

1.7 La Paradoja de Russell 18

1.7.1 Teorema 1 19

1.7.1 Teorema 2 20

1.8 Algunos conjuntos especiales 20

1.8.1 Conjunto referencial o universal 20

1.8.1.1 Definición de conjunto universal 20

1.8.2 Conjunto disjuntos 21

1.8.3 Conjunto de partes o conjunto potencia 22

1.8.3.1 Propiedades del conjunto potencia 22

1.8.3.2 Teorema de conjunto potencia 1 22

1.8.3.3 Teorema de conjunto potencia 2 22

Capítulo II. Operaciones con conjuntos 24

2.1 Unión de conjuntos 24

2.1.1 Propiedades de unión de conjuntos 25

2.2 Intersección de conjuntos 26

2.2.1 Propiedades de intersección de conjuntos 27

2.3 Diferencia de conjuntos 27

2.3.1 Propiedades de diferencia de conjuntos 28

2.4 Complemento de conjuntos 29

2.4.1 Propiedades del complemento de conjuntos 29

2.5 Diferencia simétrica de conjuntos 31

2.5.1 Propiedades de diferencia simétrica de conjuntos 31

2.6 Resolución de Problemas ... 32

Capítulo III. Operaciones Generalizadas ... 36

3.1 Introducción ... 36

3.2 Conjuntos indizados ... 36

3.3 Familia de conjuntos ... 37

3.4.. Operaciones básicas generalizadas ... 37

3.4.1 Unión de familia de conjuntos ... 37

3.4.2 Intersección de familia de conjuntos ... 38

3.4.2.1 Propiedades generales de la familia de conjuntos ... 39

3.5 Partición y cubrimiento ... 40

3.5.1 Cubrimiento ... 40

3.5.2 Partición ... 40

3.5.2.1 Propiedad ... 40

Aplicación didáctica ... 42

Síntesis ... 44

Apreciación crítica y sugerencias ... 45

Referencias ... 46

Apéndices ... 48

Lista de figuras

Figura 1. Conjunto universal 21

Figura 2. Conjuntos disjuntos A y B 21

Figura 3. Unión conjuntos 25

Figura 4. Intersección de conjuntos 26

Figura 5. Diferencia de conjuntos 28

Figura 6. Complemento de un conjunto 29

Figura 7. Diferencia simétrica de conjuntos 31

Figura 8. Ejercicio de conjuntos 34

Figura 9. Partición de una familia de conjuntos 40

Introducción

Desde los inicios de nuestra historia, para poder subsistir era necesario agruparse en comunidades, por eso cabe destacar que ya se tenía la idea de algunos conceptos matemáticos en esos tiempos. Dentro de estas sociedades donde se vivía, sus habitantes se relacionaban entre dos o más de ellos, para poder formar un conjunto de personas, de manera que así estuvieran en condiciones depoder satisfacer sus necesidades, ya sea sociales, económicas, culturales, entre otras.

Todo esto conllevaba a reunirse entre ellos, a elegir a personas en común, a sacar a alguno que no estaba de acuerdo, pero no solo podemos hablar de personas sino también de ideas, objetos, grupos étnicos y más.

Es por eso que este trabajo monográfico tiene el propósito de generar el interés de los estudiantes sobre los conceptos básicos, con un enfoque axiomático en la teoría de conjunto.

Para poder cumplir con este propósito, el presente trabajo está compuesto por tres capítulos. El capítulo I está dedicado a abordar las generalidades básicas para entender la idea de conjuntos, para luego continuar con todos aquellos axiomas que dan origen a la teoría axiomática de conjuntos y, finalmente, nos da a conocer una paradoja que hizo temblar el mundo de las matemáticas.

En el capítulo II se establecen formalmente todas las operaciones con conjuntos y también algunas de sus consecuencias. El capítulo III está relacionado con las generalizaciones de las operaciones básicas de conjuntos, para luego abordar aquellos conjuntos que cubren otros conjuntos.

Finalmente, planteamos una situación didáctica, para luego terminar con la síntesis, apreciación crítica, sugerencias y las referencias bibliográficas.

Capítulo I

Axiomático de la teoría de conjuntos

1.1 Breve reseña de la teoría de conjuntos

La teoría de conjuntos empezó a surgir aproximadamente en los años de la década de 1870, con los trabajos del notable matemático Alemán George Cantor, como producto de las investigaciones sobre algunas clases de conjuntos no finitos en los reales.

Como consecuencia de esta investigación, Cantor creó una nueva disciplina matemática llamada: la teoría de conjuntos. Muchos matemáticos admiraban esta nueva disciplina, pero, a la vez, otros la miraban con cierto grado de desconfianza. Recién en 1900 esta disciplina se reconoció como una rama de las matemáticas.

Los problemas comenzaron en el momento que empezaron a salir paradojas en aquella teoría (proposiciones que son ciertas y falsas al mismo tiempo), siendo la más saltante la paradoja de Bertrand Russell. Esto causó un cierto desconcierto en el mundo de las matemáticas, donde muchos se preguntaban si las matemáticas verdaderamente eran consistentes.

Motivo por el cual se reconstruyó dicha teoría, con sólidas bases, con el ya conocido método de axiomatización.

1.2 Teoría axiomática de conjuntos

El método axiomático apareció aproximadamente hace 2000 años, y fue Euclides, con el gran libro *Elementos*, el que utilizó este método para presentar la geometría. Euclides empezó su gran obra usando proposiciones cuya veracidad se aceptan sin la necesidad de ser demostradas, al cual llamo axiomas o postulados.

Las teorías requieren escribirse con definiciones más exactas sobre los conceptos a utilizar, un concepto se define usando otro concepto y este concepto por medio de otros anteriores; por eso se selecciona de forma conveniente el concepto en dicho resultado teórico del cual no es definido, aquellos conceptos se les llama términos primitivos de la teoría. Estos términos primitivos dan origen a los términos definidos.

Por ejemplo, la geometría euclidiana tiene como bases sólidas 5 términos primitivos: punto, recta, también las relaciones de incidencia, estar entre y de congruencia.

Lo fundamental en una teoría es que tiene proposiciones que proporcionan propiedades en términos definidos o primitivos, aquellas proposiciones se demostrarán, todas deben cumplir la demostración. Por lo general aparecerán círculos viciosos, para evitar ello se seleccionarán proposiciones cumpliendo de forma abrumadora su aceptación, pero que no sea demostrada, es por ello que las proposiciones son los axiomas y postulados de un contexto teórico, la proposición que es consecuencia lógicas de axiomas son llamados teoremas (Zaenz, Gil, Lopez, Romero, y Bethelmy, 2001).

Por lo tanto, el sistema axiomático en matematica se clasifica en:

1.2.1 Términos primitivos.

Son aquellos conceptos que no tiene definición y que se dan en un contexto determinado. Por ejemplo, en la geometría euclidiana tenemos el punto, la recta y el plano.

1.2.2 Términos definidos.

Son aquellos conceptos que se dan partiendo de los términos primitivos. Por ejemplo, en geometría, por medio del punto y la recta se puede tener el concepto de segmento.

1.2.3 Axiomas.

Son proposiciones verdaderas tan evidentes que son aceptadas sin demostración.

Los axiomas tienen un papel fundamental en la totalidad de la teoría, es la piedra en la cual se va construyendo la teoría; un ejemplo: los muy conocidos axiomas de Peano, axioma de elección y axioma de especificación (Murillo, 2010).

1.2.4 Teoremas.

Son proposiciones verdaderas que se deducen de los axiomas y que sí requieren demostración. Por ejemplo, tenemos el famoso teorema de Pitágoras.

La teoría de conjuntos se basa en 3 nociones primitivas: que son conjuntos, elemento y la relación de pertenencia; se simboliza por $\in$, el cual relaciona cada elemento con el conjunto.

Un ejemplo: conjunto de Naturales denotado por $\mathbb{N}$, que son pares y menores e iguales que 10, entonces sus elementos serian el $2, 4, 6, 8$ y 10; y usando la relación de pertenencia tendremos que 2 pertenece a dicho conjunto.

1.3 Lenguaje de la teoría de conjuntos

Para estudiar de manera formal la teoría de conjuntos es necesario conocer un lenguaje también formal que nos permita entender todo lo antes expuesto. Un lenguaje formalizado está compuesto por un grupo de símbolos y reglas que nos ayudan a formar expresiones más complicadas, teniendo como base los símbolos originales.

En general, podemos decir que un lenguaje conocido como primer orden está constituido para manifestar acontecimientos de la teoría de las matemáticas, y están organizados en dos clases: el lenguaje lógico, que se usa en todas las teorías, y también el lenguaje específico parametrizado, lo que significa que son todos los símbolos propios en un lenguaje particular y sea interpretada de forma subjetiva, esto quiere decir que en diversas estructuras tendrián diversos significados (Muñoz, 2002).

Los símbolos del lenguaje formalizado lógico son:

Variables: $x, y, z, X, Y, Z,$ x_1, x_2, ..., generalmente se usan las últimas letras del alfabeto latino, y pueden ser con subíndice o sin subíndice.

Contantes: $a, b, c, A, B, C,$ ..., generalmente se usan letras iniciales del alfabeto latino y se empleanen la representación de conjuntos específicos.

El símbolo de pertenencia: $\in$.

El símbolo de igualdad: $=$.

Los conectivos lógicos: $\sim$ negación, $\wedge$ conjunción, $\vee$ disyunción, $\Longrightarrow$ implicación y $\Longleftrightarrow$ equivalencia.

Los cuantificadores: $\forall$ cuantificador universal y $\exists$ cuantificador existencial

El paréntesis: (,) usado como símbolo de agrupación

Entonces, para una cadena finita cualquiera que se forma por medio de símbolos se considera una expresión del lenguaje (Lewin, 2006).

1.4 Nociones sobre el concepto de conjunto

La noción sobre la conceptualización de conjunto es muy amplia, ya que es un término primitivo. A continuación, mencionaremos algunas:

De manera intuitiva, un conjunto se verá como una lista, una colección o clase de objetos que está bien definido (Lipschutz, 1970).

La idea de un conjunto es algo ya entendido, podemos identificarlo como una agrupación o colección de cualquier tipo de entidades u objetos que tienen propiedades comunes (Figueroa, 2013).

El conjunto se puede entender como una forma de agrupar dentro de un todo varios objetos con diferencias a la percepción o del pensamiento de la persona (Cignoli, 2016).

Entonces, podemos entender por conjunto que es una agrupación o reunión de objetos o elementos que comparten una propiedad en común.

1.5 Determinación de un Conjunto

Normalmente los conjuntos se escriben con alfabetos latino en mayúsculas $A, B, \dots Y, Z$; y a sus elementos se les escribe en minúscula del alfabeto latino $a, b, c, \dots, y, z$; o también con números.

Podemos decir que, si un conjunto T está conformado por elementos, y si x viene a ser un elemento del conjunto T, entonces lo podemos denotar por $x \in T$; y si x no es un elemento del conjunto T, lo denotaremos por $x \notin T$.

Por ejemplo, si tenemos el conjunto A, que tiene por elementos a los pares $2, 4, 6, 8$ y se representa de la siguiente manera: $A = \{2,4,6,8\}$.

Si 2 pertenece al conjunto A, su representación tiene la forma $2 \in A$; y si un elemento no pertenece al conjunto A, lo representamos $3 \notin A$.

El conjunto se determina de dos maneras:

Por extensión: el conjunto se determina dando a conocer cada uno de los elementos que lo conforman. Ejemplo: $T = \{3,6,9,12,15,18\}$.

Por comprensión: cuando un conjunto se determina dando una condición o condiciones suficientemente precisas, el cual cada uno de sus elementos deben de cumplir. Por ejemplo: $T = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 0 < x < 20 \;\wedge x = \dot{3}\}$.

Si se denota por $p(x)$, una condición o propiedad de un elemento x cualquiera de un conjunto A, se escribe: $A = \{x \,/\, p(x)\}$ o también $A = \{x : p(x)\}$.

1.6 Axiomas de la teoría de conjuntos

1.6.1 Axioma de extensión.

Dados 2 conjuntos cualesquiera A y B, se dice que $A = B$, si todo elemento de A pertenece a B, y además todo elemento de B pertenece a A, expresado de manera lógica diremos: $A = B \iff \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

A partir de este axioma podemos introducir la siguiente definición.

1.6.1.1 Definición de inclusión.

Dados A y B conjuntos. Se dice que A es un subconjunto de otro B o que A está incluido o contenido en otro B, el cual se denota: $A \subseteq B$, si solo si todo elemento de A es elemento de B., expresado en el lenguaje lógico diremos: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow A = B)$.

Con esta definición, el axioma de extensión puede ser reescrito de la siguiente manera: $\forall A\, \forall B\, (A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A \Rightarrow A = B)$.

Nota1: si A no está incluido en B, se escribe $A \not\subset B$, se establece del siguiente modo: $A \not\subset B \iff \exists x(x \in A \,/\, x \notin B)$.

Nota 2: si $A \subseteq B$ y además $A \neq B$, diremos que A es subconjunto propio de B y lo denotaremos $A \subset B$.

1.6.1.1.1 Propiedades de la Inclusión.

La inclusión cumple las siguientes propiedades:

Propiedad reflexiva: $A \subset A$.

Demostración: si A es un conjunto, y suponiendo que $\forall x, x \in A$, la implicación: $\forall x \in A: x \in A \Rightarrow x \in A$ es siempre verdadera (cabe recordar que: $p \Rightarrow p$ es una tautología); en consecuencia, por definición, se tiene: $A \subset A$

Propiedad antisimétrica: si $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$.

Demostración: es una consecuencia de la definición en los conjuntos con igualdad, en efecto, sea A y B conjuntos. Si $\subset B$ y $B \subset A$, supongamos que $A \neq B$. Entonces, por definición: $\exists x \in A \,/\, x \notin B$ ó $\exists x \in B \,/\, x \notin A$, es decir $A \not\subset B$ o $B \not\subset A$, que es lo contrario a la hipótesis. Por lo tanto, $A = B$.

Propiedad transitiva: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Demostración: en efecto, sea A, B y C conjuntos. Si $x \in A$ por hipótesis se tiene: $x \in A \Rightarrow x \in B$ (por hipótesis es verdadero) y $x \in B \Rightarrow x \in C$ (por hipótesis es verdadero). Entonces, por la ley de silogismo hipotético: $x \in A \Rightarrow x \in C$ (es verdadera). En consecuencia, $A \subset C$ (por la definición de inclusión) (Figueroa, 2013).

Ejemplo: $\{7,3,5\} \subseteq \{3,5,7\}, \{c\} \subseteq \{a, b, c\}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

1.6.2 Axioma de existencia.

Se refiere a que existe un conjunto con la particularidad de que no tiene elementos, expresado en el lenguaje lógico diremos: $\exists A\ \forall x\ (x \notin A)$. Al conjunto sin elementos se le dice conjunto vacío con notación $A = \emptyset$.

1.6.2.1 Teorema.

Existe un único conjunto que no tiene elementos.

$\emptyset \subset A, \forall A$ (es decir, el conjunto se incluye en cualquier conjunto).

Demostración de que existe un único conjunto, el cual no tiene elementos: Sean A y B dos conjuntos vacíos, tal que $\forall x\ (x \notin A \wedge x \notin B)$, entonces tendríamos que probar $A = B$; en efecto, por el axioma de extensión tendríamos:

Por demostrar $A \subset B$. Supongamos que $A \neq B$, entonces existe al menos un $x \in A$ tal que $x \notin B$, por lo tanto $A \not\subset B$. Luego observamos que $x \in A \wedge x \notin A$ (contradicción). Por lo tanto, $A \subset B$.

Por demostrar $A \supset B$, análogo al anterior. Finalmente: $A = B = \emptyset$ y es único.

Demostración de $\emptyset \subset A, \forall A$: en efecto, sea x cualquier elemento $\forall x \in \emptyset$, de la condicional $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$, como $x \in \emptyset$, al final el enunciado es verdadero $\therefore \emptyset \subset A, \forall A$.

Ejemplo: determinar el conjunto $T = \{x \in \mathbb{Z}\ /\ 18x^2 - 2 = 0\}$.

Resolución: efectuando la ecuación $18x^2 - 2 = 0$ tiene como soluciones solo a los valores $x = -\frac{1}{3} \wedge x = \frac{1}{3}$, se nota que las soluciones no están en $\mathbb{Z}$, entonces la ecuación no posee solución en $\mathbb{Z}$. Por lo tanto, se tiene el conjunto $T = \emptyset$.

1.6.3 Axioma de separación.

Sea A un conjunto y $P(x)$ una fórmula, entonces existe un conjunto B cuyos elementos son aquellos elementos de A que verifican $P(x)$, por axioma de extensionalidad, B es único y se denota por $B = \{x \in A\ /\ P(x)\}$.

Expresado el axioma de separación en el lenguaje lógico, se representa como:

$(\forall A)\ (\exists B)\ \forall x\ \left(x \in B\ \Leftrightarrow \left(x \in A\ \wedge\ P(x)\right)\right)$.

El axioma de separación en particular nos permite construir a la intersección de dos conjuntos, pues al intersectar 2 conjuntos se construye empezando a separar del primer conjunto aquellos elementos pertenecientes al otro conjunto.

1.6.3.1 Definición de intersección.

Sean A y B conjuntos, entonces la intersección se define así:$A \cap B = \{x \in A: x \in B\}$.

Ejemplo: sean P y Q dos conjuntos cualesquiera, por consiguiente existe un conjunto H tal que $x \in H$ sí y solo si $x \in P \wedge x \in Q$.

En efecto, se considera la caracteristica $P(x, Q)$ de x y Q, $\Rightarrow x \in Q$, por el teorema de separación tenemos, para todo conjunto Q y cualquier otro P existe un H tal que $x \in H$ si y solo si $x \in P \wedge P(x, Q)$, lo que indica que si y solo si $x \in P \wedge x \in Q$.

1.6.4 Axioma del par.

Sean 2 conjuntos cualquiera, entonces existe un conjunto con elementos que son los 2 conjuntos iniciales, es decir si A y B son conjuntos entonces se tiene $\{A, B\}$ es un conjunto, expresado el axioma del par en el lenguaje lógico se representa:

$(\forall A)(\exists B)(\exists C)\forall x\ (x \in C \Leftrightarrow x = A \vee x = B)$

A partir del axioma de extensionalidad y de este axioma, se garantiza la existencia del conjunto que tiene un solo elemento, el cual llamaremos conjunto unitario o singletón.

En efecto, si consideramos el par no ordenado $\{a, b\}$, es suficiente considerar $a = b$, entonces $\{a, a\} = \{a\}$.

Ejemplo: sean A y B dos conjuntos y considerando que $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$, notamos que $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$ es un conjunto el cual $\emptyset \in \{\emptyset\}$, luego podemos notar que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, puesto que $\emptyset$ no tiene elementos y $\{\emptyset\}$ contiene un elemento.

1.6.5 Axioma de la unión.

Dado cualquier conjunto A, existe otro B con $x \in B$ si y solo si $x \in X$, para algún $x \in B$. Mediante el axioma de extensión esta unión es única y se denota : $B = \bigcup A$.

Expresado en el lenguaje lógico, diremos: $(\forall A)(\exists B)\forall x\ \big(x \in B \Leftrightarrow \exists\omega(x \in \omega \wedge x \in A)\big)$.

Ejemplo: los conjuntos A y B cualesquiera, $x \in \bigcup\{A, B\}$ si y solo si $x \in A \vee x \in B$. El conjunto $\bigcup\{A, B\}$ es le dice unión de A y B, se denota por $A \cup B$ (Espinoza, 2005).

1.6.6 Axioma de las partes.

Dado cualquier conjunto A, existe un conjunto P, que está compuesto por todo subconjunto de A, el cual se denota por $P(A)$ y se llamará como el conjunto de partes. Es decir, si $x \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$. Por el axioma de extensión se asegura de la unicidad del conjunto de partes. Expresado en el lenguaje lógico: $(\forall A)(\exists B)\forall X\ (X \in B \Leftrightarrow X \subseteq A)$.

Del siguiente esquema se resalta que al conjunto B se le dice conjunto potencia de A.

Este axioma es uno de los más potentes, pues nos permite construir muchos conjuntos importantes en matemáticas; por ejemplo, el conjunto cociente, el producto cartesiano.

Ejemplo: el conjunto formado por 2 elementos tiene su conjunto de partes así: $P(\{a, b\}) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$.

Ejemplo: dado un conjunto A, se tiene que el $\emptyset \subset A$, $A \in P(A)$. De manera particular se da que el conjunto de partes es diferente del vacío $(P(A) \neq \emptyset)$ para cualquier A.

1.7 La paradoja de Russell

A principios del siglo XX, la noción tan amplia que se tenía de conjunto trajo algunos problemas, es así que el filósofo y matemático ingles Bertrand Russell descubrió una paradoja que puso en grandes dificultades a la teoría de conjuntos.

Russell dio a conocer la siguiente paradoja. Si consideramos un conjunto R que se define como: dado un objeto que pertenece al conjunto R si y solo si no pertenece al mismo conjunto. Expresado en el lenguaje lógico, sería: $R = \{x : x \notin x\}$.

La pegunta entonces sería: ¿R es o no elemento de sí mismo?, expresado en símbolos ¿$R \in R$? Veamos que, si R no pertenece al mismo R, mediante la definición de R, R si pertenece a sí mismo. Asimismo, si R pertenece al mismo R, por lo tanto, de la definición de R se tiene que R no pertenece al mismo conjunto. Para cualquier caso de los dos casos, se ve que se contradicen, entonces $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$.

Esta es llamada la paradoja de Russell, y que surgió debido a que se pueden tener en cuenta conjuntos muy grandes, con mucha libertad en escoger las condiciones en que se estructura el conjunto (Muñoz, 2002).

Es importante señalar el peligro que se tiene al no especificar adecuadamente el conjunto universo. Entonces, esta paradoja se evita, definiendo apropiadamente el conjunto universo.

Esta paradoja es de cierto modo similar a la paradoja popular siguiente: En un pueblo existe un peluquero que afeita sola a los hombres que no se pueden afeitar por su cuenta. La preguntas sería: ¿Quién afeita al peluquero? (Lipschutz, 1970).

1.7.1 Teorema 1.

Sea A un conjunto. Entonces hay un conjunto R tal que $R \notin A$.

Demostración: definimos $R = \{x \in A \;/\; x \notin x\}$, tal que R es un conjunto por el axioma de separación.

Supongamos que $R \in A$.

Caso 1: Si $R \in R \Rightarrow R \notin R$ (contradicción).

Caso 2: Si $R \notin R \Rightarrow R \in R$ (contradicción).

Notamos que en ambos casos tenemos una contradicción y esto se da por haber supuesto que $R \in A$. Finalmente $\therefore R \notin A$.

1.7.2 Teorema 2.

No existe un conjunto formado de todos los conjuntos.

Prueba: se supone lo contrario, se tiene el conjunto U de todos los conjuntos y consideramos de la definición $P(x): x \notin x$. Del axioma de separación, indica que existe algún conjunto R con $x \in R \Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin x$; o sea, x es elemento de R si y solo si x es conjunto y x no pertenece a sí mismo. Además, R es un conjunto, por ello $R \in U$; por consiguiente, R verifica o no la propiedad P.

Luego, si $R \notin R$ por ello $R \in R$, es decir $R \in R \Rightarrow R \notin R$, lo que contradice. Además, si $R \in R \Rightarrow R$ si cumple la propiedad P, por ello $R \notin R$, luego se tiene $R \notin R \Rightarrow R \in R$, se contradice. Finalmente, el haber supuesto que existe el conjunto U de todos los conjuntos y considerando la propiedad P, con eso nos lleva a contradecir. Entonces, se concluye la no existencia del conjunto U de todos los conjuntos.

La moraleja indica que no es posible en matemáticas hallar algo de la nada. Si se va a caracterizar un conjunto, no solo se debe tener una propiedad; es necesario tener un conjunto en el que se aplique a los elementos la propiedad (Hernández, 1998).

1.8 Algunos conjuntos especiales

1.8.1 Conjunto referencial o universal.

En la teoría de conjuntos, cualquier aplicación se tiene que los conjuntos estudiados están incluidos a otro conjunto que se toma como base o referencia, al cual se le denomina universo o referencial. No existe un conjunto universal absoluto.

1.8.1.1 Definición de conjunto universal.

Dados 2 conjuntos A y U, se dice que a U conjunto universal o referencial para A si y solo si $A \subset U$.

Un recurso didáctico, en la comprensión intuitiva de conjuntos, se representa a los llamados diagramas de Venn- Euler, siendo diagramas de figuras cerradas.

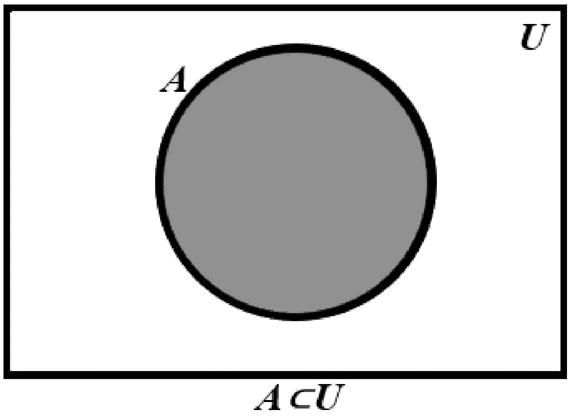


Figura 1. Conjunto universal. Fuente: Autoría propia.

1.8.2 Conjunto disjuntos.

Sean 2 conjuntos *A* y *B*, se dirá disjuntos, si ningún elemento de *A* se encuentra en *B* y ningún elemento de *B* se encuentra en *A*, es decir, no existen elementos en común.

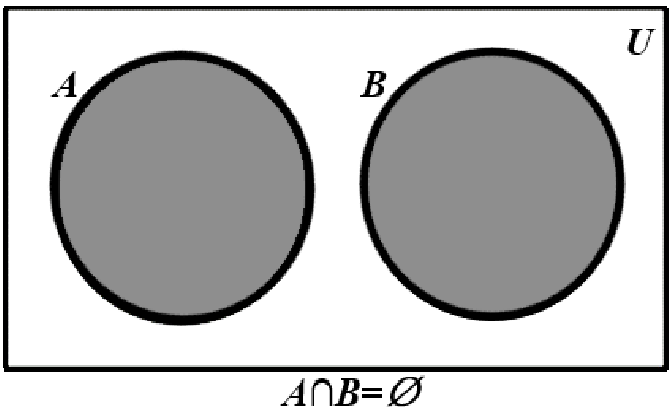


Figura 2. Conjuntos disjuntos A y B. Fuente: Autoría propia.

Ejemplo: el conjuntos de los racionales ($\mathbb{Q}$) y de los irracionales ($\mathbb{I}$), son conjuntos disjuntos, pues no tienen elementos en común.

1.8.3 Conjunto de partes o conjunto potencia.

Sea el conjunto A, se define al conjunto potencia o de partes de A, como el conjunto conformado por subconjuntos totales de A, denotado: $P(A)$, esto es $P(A) = \{X / X \subset A\}$.

1.8.3.1 Propiedades del conjunto potencia.

$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$.

$\emptyset \in P(A) \wedge A \in P(A)$.

$B \subset A \Leftrightarrow B \in P(A)$.

Ejemplo: para el conjunto $A = \{2,3,4\}$, tendremos que su conjunto potencia está formado por todos los subconjuntos de A: $P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, A\}$.

1.8.3.2 Teorema de conjunto potencia 1.

Sean A y B dos conjuntos, entonces se cumple que si $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$.

Demostración: observamos que tenemos una doble implicación, entonces:

Primero que si $A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$, sea X un conjunto cualquiera, usamos la definición de $P(A)$: $X \in P(A) \Rightarrow X \subset A$, luego de la hipótesis $A \subset B \Rightarrow X \subset B$, ahora de la definición de $P(B) \Rightarrow X \in P(B)$. Por ello $P(A) \subset P(B)$.

Segundo que $P(A) \subset P(B) \Rightarrow A \subset B$, en efecto: $A \in P(A)$ y por hipótesis tenemos que $P(A) \subset P(B) \Rightarrow A \in P(B) \Rightarrow A \subset B$.

Finalmente, se concluye que $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$.

1.8.3.3 Teorema de conjunto potencia 2.

Se el conjunto A con n elementos, el conjunto potencia $P(A)$ tiene 2^n elementos.

Sea el conjunto A de la siguiente manera: $A = \{x_1, x_2, x_3 \ldots x_n\}$.

Se inicia al tomar el elemento x_1, este elemento, junto con el conjunto vacío, nos da los dos primeros elementos de $P(A)$. Cabe recordar que a partir del axioma de existencia habíamos demostrado la inclusión del conjunto vacío en todo conjunto. Entonces, los elementos del conjunto potencia $P(A)$ son: $\emptyset, \{x_1\}$.

Se toma el elemento x_2, este elemento, agregado a los dos elementos de los dos subconjuntos anteriores, nos da otros dos, siendo $\{x_2\}$ y $\{x_1, x_2\}$ estos 2 nuevos subconjuntos y los 2 anteriores dan los $4 = 2^2$ subconjuntos de A: $\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}$.

Ahora el elemento x_3. Este elemento, más los elementos de los 4 subconjuntos anteriores, nos dan 4 nuevos subconjuntos de A: $\{x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}$.

Estos 4 nuevos subconjuntos y los 4 antiguos nos dan los $8 = 2^3$siguientes subconjuntos de A: $\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}$.

De esta manera podemos continuar hasta llegar al paso n, en el cual tomamos el último elemento, que es x_n. Si se sigue los pasos anteriores, obtendremos al fin de cuentas 2^n subconjuntos de A. Como ya no hay más elementos en A, entonces estos 2^n subconjuntos son todos los subconjuntos de A, por lo tanto $P(A)$ tiene 2^n elementos (Zaenz *et al*., 2001).

Ejemplo: sea A un conjunto, tal que :

Si A no tiene elementos, es decir $A = \emptyset$, entonces $P(A)$ tiene $2^0 = 1$ elemento, en efecto $P(A) = \{\emptyset\}$.

Si A tiene un elemento, es decir $A = \{a\}$, entonces $P(A)$ tiene $2^1 = 2$ elementos, en efecto $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

Si A tiene dos elementos, es decir $A = \{a, b\}$, entonces $P(A)$ tiene $2^2 = 4$ elementos, en efecto $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Si A tiene tres elementos, es decir $A = \{a, b, c\}$, entonces $P(A)$ tiene $2^3 = 8$ elementos, en efecto $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Capítulo II

Operaciones con conjuntos

En este capítulo se estudiará y definirá las operaciones más importantes y conocidas de los conjuntos, tales como la intersección, la unión, la diferencia, la diferencia simétrica y el complemento, pues ya tenemos como base los axiomas antes mencionados en el capítulo anterior. Para poder definir dichas operaciones y poder estudiar dichas operaciones, se va a considerar que se tiene al conjunto U como el conjunto universal, que va a contener como subconjuntos a la totalidad de los subconjuntos, que se usa para definir dichas operaciones (Zaenz *et al.*, 2001).

2.1 Unión de conjuntos

Sean 2 conjuntos A y B cualesquiera, se define la unión de conjuntos, al conjunto de todos los elementos pertenecientes a A o B o a ambos, denotado por el símbolo $A \cup B$, es decir: $A \cup B = \{x \in U \ / \ x \in A \vee x \in B\}$.

Su caracterización lógica es: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

O también su equivalente: $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$.

Su representación gráfica, mediante el diagrama de Venn, es:

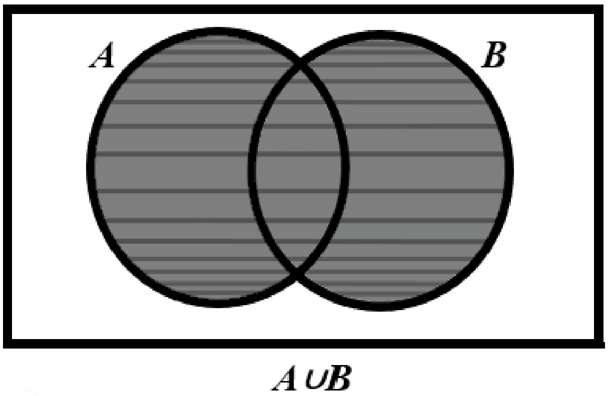


Figura 3. Unión de conjuntos. Fuente: Lipschutz, 1970.

2.1.1 Propiedades de unión de conjuntos.

Sean tres conjuntos A, B y C cualesquiera, se cumple que:

$A \cup A = A$.

$A \cup \emptyset = A$.

$A \cup U = U$.

$A \cup B = B \cup A$.

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$.

$A \subset (A \cup B)$; $B \subset (A \cup B)$.

Si $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$.

Nota: se demuestra algunas de las propiedades, y los demás se lo deja para el lector.

Prueba de $A \cup A = A$: por probar que $(A \cup A) \subset A$ y $A \subset (A \cup A)$. Primero se probará que $(A \cup A) \subset A$, sea $x \in (A \cup A) \Rightarrow x \in A \wedge x \in A$ (recordar que $p \vee p \equiv p$), sea $x \in A$, luego $x \in (A \cup A) \Rightarrow x \in A$, por lo tanto $(A \cup A) \subset A$. Segundo, se probará que $A \subset (A \cup A)$, sea $x \in A$, entonces se sigue que $(x \in A \wedge x \in A)$, luego $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup A)$. Por lo tanto, $A \subset (A \cup A)$. Finalmente, tenemos que $A \cup A = A$.

Prueba de $A \cup U = U$. Por demostrar que $A \cup U \subset U$ y $U \subset A \cup U$. Primero se probará que $A \cup U \subset U$, sea $x \in (A \cup U) \Rightarrow x \in A \vee x \in U$, por definición de U: $x \in U$, luego $x \in (A \cup U) \Rightarrow x \in U$, por lo tanto $A \cup U \subset U$. Segundo, se probará que $U \subset A \cup U$, en efecto sea $x \in U$, entonces es válido: $x \in A \vee x \in U$, luego $x \in U \Rightarrow x \in (A \cup U)$, por lo tanto $U \subset A \cup U$. Finalmente, tenemos que $A \cup U = U$.

Prueba de $A \subset (A \cup B)$: sea $x \in A$, usaremos $p \Rightarrow (p \vee q)$, que es una tautología, luego $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$, por lo tanto $A \subset (A \cup B)$, el segundo caso $B \subset (A \cup B)$, se demuestra de forma análoga.

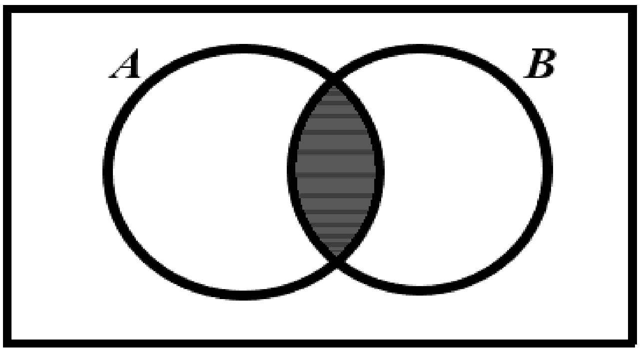
Prueba de que si $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$, en efecto, por la propiedad sabemos que $A \subset (A \cup B)$, si $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A \subset \emptyset$, pero también sabemos que $\emptyset \subset A$, entonces como tenemos que $A \subset \emptyset$ y $\emptyset \subset A \Rightarrow A = \emptyset$. De forma análoga se demuestra que $B = \emptyset$.

2.2 Intersección de conjuntos

Dados los conjuntos A y B, se define la intersección de conjuntos al conjunto de todos los elementos que están en A y en B, denotado: $A \cap B$, es decir: $A \cap B = \{x \in U /\ x \in A \wedge x \in B\}$. Su caracterización lógica es: $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.

O su equivalente es: $x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B)$.

Su representación gráfica mediante el diagrama de Venn es:



$A \cap B$

Figura 4. Intersección de conjuntos. Fuente: Lipschutz, 1970.

2.2.1 Propiedades de intersección de conjuntos.

Sean tres conjuntos A, B y C cualesquiera, se cumple que:

$A \cap A = A$.

$A \cap \emptyset = \emptyset$.

$A \cap U = A$.

$A \cap B = B \cap A$.

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

$(A \cap B) \subset A$; $(A \cap B) \subset B$.

Si $A \subset B \Rightarrow (A \cap C) \subset B \cap C),\ \forall C$.

Si $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Nota: se demostrará algunas de las propiedades, y los demás se lo deja para el lector.

Prueba de $A \cap \emptyset = \emptyset$: primero se probará $A \cap \emptyset \subset \emptyset$, en efecto sea $x \in (A \cap \emptyset)$, entonces $x \in A \wedge x \in \emptyset$, luego $x \in \emptyset$, $x \in (A \cap \emptyset) \Rightarrow x \in \emptyset$, por lo tanto $A \cap \emptyset \subset \emptyset$. Segundo, se probará que $\emptyset \subset A \cap \emptyset$, en efecto, sabemos que el $\emptyset$ está incluido en cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subset A \cap \emptyset$. Finalmente, tenemos que $A \cap \emptyset = \emptyset$

Prueba de $(A \cap B) \subset A$: sea $x \in (A \cap B)$, entonces $x \in A \wedge x \in B$, luego $x \in A$, es decir si $x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$, por lo tanto $(A \cap B) \subset A$. Similar para $(A \cap B) \subset B$.

Prueba de que: si $A \subset B \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C),\ \forall C$. En efecto, si $x \in (A \cap C) \Rightarrow$ $x \in A \wedge x \in C$, además $A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$, ahora $x \in B \Rightarrow x \in C \Rightarrow x \in (B \cap C)$, luego $x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (B \cap C)$. Por lo tanto $(A \cap C) \subset B \cap C)$.

2.3 Diferencia de conjuntos

Dados los conjuntos A y B, se define la diferencia de conjuntos al conjunto de todos los elementos en A y no en B, denotado: $A - B$, es decir: $A - B = \{x \in U \ / \ x \in A \wedge x \notin B\}$.

Su caracterización lógica es: $x \in (A - B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

O su equivalente es: $x \notin (A - B) \Rightarrow x \notin A \vee x \in B$.

Su representación gráfica, mediante el diagrama de Venn, es:

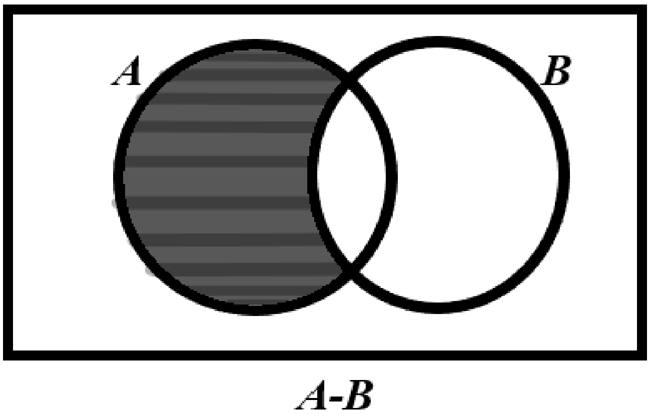


Figura 5. Diferencia de conjuntos. Fuente: Lipschutz, 1970.

2.3.1 Propiedades de diferencia de conjuntos.

Sean tres conjuntos A, B y C cualesquiera, se cumple que:

$A - A = \emptyset$.

$A - \emptyset = A$.

$\emptyset - A = \emptyset$.

$(A - B) \subset A$.

$A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$.

$B \cap (A - B) = \emptyset$.

Si $A \subset B \Rightarrow\ B \subset (A - C) \subset (B - C),\ \forall C$.

$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

Nota: se probará algunas de las propiedades, y los demás se lo deja para el lector.

Prueba de $A - A = \emptyset$: en efecto, sea $x \in (A - A) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \Rightarrow x \in \emptyset$. Por lo tanto $A - A = \emptyset$.

Prueba de $B \cap (A - B) = \emptyset$: sea $x \in B \cap (A - B)$, luego $x \in B \wedge x \in (A - B) \Rightarrow x \in B \wedge (x \in A \wedge x \notin B)$ por ello $\Rightarrow (x \in B \wedge x \notin B) \wedge x \in A$. Entonces $B \cap (A - B) = \emptyset$.

Prueba que si $A \subset B \Rightarrow B \subset (A - C) \subset (B - C), \ \forall C$: Por demostrar que si $x \in (A - C)$ entonces $x \in (B - C)$. En efecto, si $x \in (A - C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin C$, luego tenemos que $A \subset B \Rightarrow x \in B \wedge x \notin C \Rightarrow x \in (B - C)$. Por lo tanto $(A - C) \subset (B - C)$.

2.4 Complemento de conjuntos

Dados los conjuntos A y B, tal que $A \subset B$, se define el complemento del conjunto A con respecto del conjunto B, al conjunto conformado por la diferencia de $B - A$, el cual es denoto por $C_B A$, es decir: $C_B A = B - A = \{x \ / \ x \in B \wedge x \notin A\}$.

Su caracterización lógica es: $x \in C_B A \Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$.

Nota: si $B = U$, entonces el complemento del conjunto A con respecto a U, se podría denotar de las siguientes maneras: $C(A) = A' = A^C = \bar{A}$

Su representación gráfica, mediante el diagrama de Venn, es:

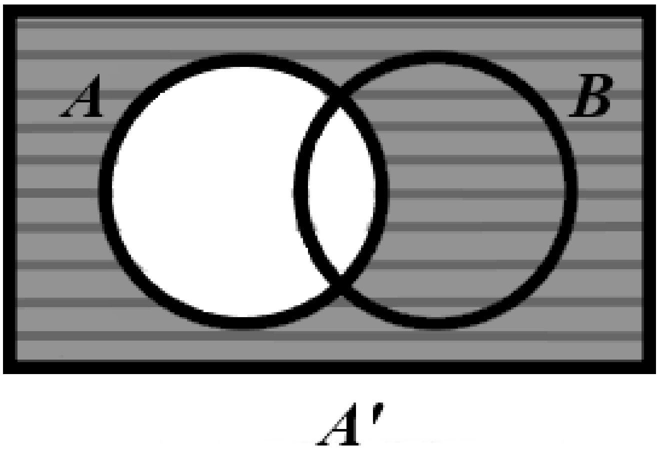


Figura 6. Complemento de un conjunto. Fuente: Lipschutz, 1970.

2.4.1 Propiedades del complemento de conjuntos.

Sean dos conjuntos A, y B, en el conjunto universal U, se tiene que:

$(A^c)^c = A.$

$\emptyset^c = U \wedge U^c = \emptyset.$

$A \cap A^c = \emptyset.$

$A \cup A^c = U.$

$A - B = A \cap B^c.$

$A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c.$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

Nota: se probará algunas de las propiedades, y los demás se lo deja para el lector.

Prueba de $A \cap A^c = \emptyset$: entonces se probará que $A \cap A^c \subset \emptyset$ y $\emptyset \subset A \cap A^c$. Primero se probará que $A \cap A^c \subset \emptyset$, en efecto, si $x \in (A \cap A^c) \Rightarrow x \in A \wedge x \in A^c$ luego se obtiene $\Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \Rightarrow x \in \emptyset$, por lo tanto $A \cap A^c \subset \emptyset$. Segundo, se probará que $\emptyset \subset A \cap A^c$. En efecto, se sabe que el conjunto vacío se incluye en todo conjunto, entonces $\emptyset \subset A \cap A^c$. Finalmente tenemos que $A \cap A^c = \emptyset$.

Prueba de $A - B = A \cap B^c$: primero se probará que $(A - B) \subset (A \cap B^c)$, en efecto, sea $x \in (A - B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Rightarrow x \in (A \cap B^c)$, por lo tanto se obtiene $(A - B) \subset (A \cap B^c)$. Segundo, se probará que $(A \cap B^c) \subset (A - B)$, en efecto, sea $x \in (A \cap B^c) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$ luego se tiene $\Rightarrow x \in (A - B)$, por lo tanto $A \cap B^c \subset A - B$. Finalmente, tenemos que $A - B = A \cap B^c$.

Prueba de $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$: primero se probará $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$, en efecto, sea $x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Rightarrow x \in (A^c \cap B^c)$, por lo tanto $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$. Segundo, se probará $(A^c \cap B^c) \subset (A \cup B)^c$, en efecto, sea $x \in (A^c \cap B^c)$ luego se tiene $\Rightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B)^c$, por lo tanto $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. Finalmente, se tiene el resultado que se pedía $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

2.5 Diferencia simétrica de conjuntos

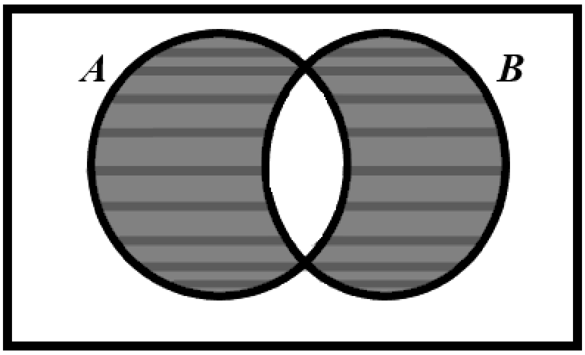
Sean los conjuntos A y B cualesquiera, se define la diferencia simétrica de los conjuntos A y B al conjunto de todos los elementos que están en A o B, pero no en ambos, denotado por $A\Delta B$, es decir: $A\Delta B = \{x \in U \,/\, (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$.

Su caracterización lógica es: $x \in A\Delta B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B\,) \vee (x \notin A \wedge x \in B\,)$

Otra manera equivalente se define: $A\Delta B = \{x \in U \,/\, x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$.

$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Su representación gráfica, mediante el diagrama de Venn, es:



$A\Delta B$

Figura 7. Diferencia simétrica de conjuntos. Fuente: Espinoza, 2005.

2.5.1 Propiedades de diferencia simétrica de conjuntos.

Sean tres conjuntos A, B y C cualesquiera, se cumple que:

$A\Delta A = \emptyset$.

$A\Delta\emptyset = A$.

$A\Delta B = B\Delta A$.

$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.

Nota: se probará algunas de las propiedades, y los demás se lo deja para el lector.

Prueba de $A\Delta A = \emptyset$: en efecto, como $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$, para conjuntos iguales $A\Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = (A) - (A)$. Por lo tanto $A\Delta A = \emptyset$.

Prueba de $A\Delta B = B\Delta A$: en efecto, como $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$, la unión e intersección de A y B es conmutativa $(A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A)$, entonces $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) = B\Delta A$. Por lo tanto $A\Delta B = B\Delta A$.

2.6 Resolución de Problemas

Dados los siguientes conjuntos $A = \{a, b, c, e\}$, $B = \{b, c, d\}$ y $C = \{a, c, e, f\}$. Calcular lo siguiente: $A \cup B$, $A \cap C$, $A - B$, $C - B$, $B - A$, $A\Delta B$, $(A \cup C) - (B \cap C)$ y $(A \cap B) \cup (A - B)$.

Resolución:

Así: $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$; $A \cap C = \{a, c, e\}$; $A - B = \{a, e\}$; $C - B = \{a, e, f\}$; $B - A = \{d\}$; $A\Delta B = \{a, d, e\}$; $(A \cup C) - (B \cap C) = \{b, c\} \cup \{a, e\} = \{a, b, c, e\}$ y $(A \cap B) \cup (A - B) = \{a, b, c, e, f\} - \{ac\} = \{a, b, e, f\}$.

Determinar por extensión el conjunto $A = \left\{\frac{2x+1}{3} \,/\, x \in \mathbb{Q} \wedge 6 < \text{x} < 12\right\}$.

Resolución:

Podemos observar que $x \in \{7,8,9,10,11\}$. Luego reemplazando en $\frac{2x+1}{3}$ se tiene A por extensión, es decir $A = \left\{\frac{15}{3}, \frac{17}{3}, \frac{19}{3}, \frac{21}{3}, \frac{23}{3}\right\}$. Finalmente $A = \left\{5, \frac{17}{3}, \frac{19}{3}, 7, \frac{23}{3}\right\}$.

Si el conjunto A es unitario. Halle $a \times b$, si $A = \{a + b, 12, 3b - 2a + 1\}$.

Resolución:

Como A es unitario: $a + b = 12 \wedge\ 3b - 2a + 1 = 12 \Rightarrow 3b - 2a = 11$, resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que: $a = 5 \wedge\ b = 7 \therefore a \times b = 35$.

Dado el conjunto $A = \{a, b, \{a, b\}, \{\emptyset\}, c\}$, indicar si es verdadero o falso, según corresponda: $a \in A$ ( ) $\{\emptyset\} \subset A$ ( ) $\{c\} \in A$ ( ) $\emptyset \in A$ ( ) $\{\emptyset\} \in A$ ( )

$\{b\} \subset A\ (\ )$ $\emptyset \in A\ (\ )$ $\{a, b, c\} \subset A\ (\ )$ $\{a, b\} \in A\ (\ )$ $\{\{a, b\}\} \subset A\ (\ )$

Resolución:

$a \in A\ (V)$ $\{\emptyset\} \subset A\ (F)$ $\{c\} \in A\ (F)$ $\emptyset \subset A\ (V)$ $\{\emptyset\} \in A\ (V)$

$\{b\} \subset A\ (V)$ $\emptyset \in A\ (F)$ $\{a, b, c\} \subset A\ (V)$ $\{a, b\} \in A\ (V)$ $\{\{a, b\}\} \subset A\ (V)$.

Si los conjuntos A y B son iguales $A = \{3a + 5; 7\}$ y $B = \left\{\frac{b}{3} - 2; 5\right\}$. Halle $b - a$.

Resolución:

Como A y B son iguales, por ello tienen los mismos elementos, se toma por conveniente: $3a + 5 = 5$ y $\frac{b}{3} - 2 = 7 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 27$. Se pide $27 - 0 = 27$.

Sean los conjuntos siguientes definidos: $A = \{2,3,4,5\}$; $B = \{4,5,6,7,8\}$; $C = \{7,8,9\}$ y $U = \{x\ /\ x \in \mathbb{Z}^{+} \wedge 0 < x < 10\}$. Calcular A^{c}, B^{c}, $(A \cap B)^{c}$ y $B^{c} - A$

Resolución:

El conjunto universal $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, operando los conjuntos A, B y C se tiene: $A^{c} = \{1,6,7,8,9\}$, $B^{c} = \{1,2,3,9\}$, $(A \cap B)^{c} = \{4,5\}^{c} = \{1,2,3,6,7,8,9\}$ y $B^{c} - A = \{1,2,3,9\} - \{2,3,4,5\} = \{1,9\}$.

Cuántos subconjuntos tiene: $A = \{x^2 + 1\ /\ x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 5\}$

Resolución:

Al operar $x \in \{-3, -2, -1,0,1,2,3,4\} \Rightarrow x^2 + 1 \in \{10,5,2,1,2,5,10,17\}$, finalmente $A = \{1,2,5,10,17\}$, el número de subconjuntos de $A = 2^{n(A)} = 2^5 = 32$.

En una encuesta realizada a 50 ciudadanos sobre los gustos de las revistas A y B, los que leen A y B son el doble a los que leen solo A, el triple a los que leen solo B y el cuádruplo a los que no leen ninguna de A y B. ¿Cuántos ciudadanos leen la revista A?

Resolución:

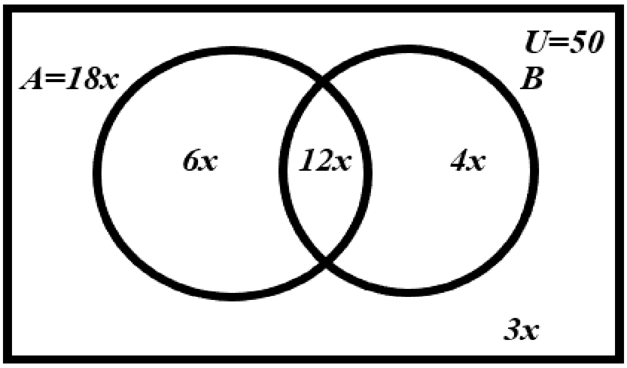


Figura 8. Ejercicio de conjuntos. Fuente: Autoria propia.

$6x + 12x + 4x + 3x = 50 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow n(A) = 18 \times 2 = 36.$

Demostrar: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ y $\big(P(A) \cap P(B)\big) \subset P(A \cup B)$.

Demostración:

Se probará que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$: primero $P(A \cap B) \subset \big(P(A) \cap P(B)\big)$, sea $x \in P(A \cap B) \Rightarrow x \subset (A \cap B) \Rightarrow x \subset A \wedge x \subset B$, luego $\Rightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B)$, por consiguiente $\Rightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B)$, ahora $\Rightarrow x \in \big(P(A) \cap P(B)\big)$, por lo tanto se tiene $P(A \cap B) \subset \big(P(A) \cap P(B)\big)$. Segundo: $\big(P(A) \cap P(B)\big) \subset P(A \cap B)$, sea $x \in \big(P(A) \cap P(B)\big) \Rightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B) \Rightarrow x \subset A \wedge x \subset B \Rightarrow$, es por ello que $x \subset (A \cap B) \Rightarrow x \in P(A \cap B)$, luego se tiene que $\big(P(A) \cap P(B)\big) \subset P(A \cap B)$. Segundo se probará $\big(P(A) \cap P(B)\big) \subset P(A \cup B)$, sea $x \in \big(P(A) \cup P(B)\big)$, luego se tiene $\Rightarrow x \in P(A) \vee x \in P(B) \Rightarrow x \subset A \vee x \subset B \Rightarrow x \subset A \cup B \Rightarrow x \in P(A \cup B)$. Por lo tanto $\big(P(A) \cap P(B)\big) \subset P(A \cup B)$. Al final: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Demostrar la siguiente propiedad: $A - B = A \cap B^c$.

Demostración:

Primero se probará $A - B \subset A \cap B^c$: en efecto sea $x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$, luego $\Rightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Rightarrow x \in A \cap B^c$. Por lo tanto $A - B \subset A \cap B^c$. Segundo se probará

$A \cap B^c \subset A - B$, sea $x \in A \cap B^c \Rightarrow x \in A \wedge x \in B^c$, luego $\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A - B$. Por lo tanto $A \cap B^c \subset A - B$. Finalmente: $A - B = A \cap B^c$.

Capítulo III

Operaciones Generalizadas

3.1 Introducción

En este capítulo hablaremos de un tipo especial de conjuntos, el cual tiene como elementos a otros conjuntos. Esta idea también nos va a permitir poder generalizar algunos conceptos como la unión e intersección de conjuntos, pero ya no con dos conjuntos sino incluso con una cantidad infinita de ellos, al cual llamaremos familia de conjuntos.

La familia de conjuntos tiene un rol muy importante en otras teorias de las matemáticas, pues su objetivo es estudiar a las familias especiales de los conjuntos.

3.2 Conjuntos indizados

Sean los conjuntos: $A_1 = \{4,8\}, A_2 = \{1,3,6,9\}, A_3 = \{5,8\}, A_4 = \{4,7,10\}$ y el conjunto $I = \{1,2,3,4,\}$, podemos notar que para cada elemento $i \in I$ le corresponde un conjunto A_1. Entonces, se dice que I es el conjunto de índices, además que los elementos $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ están indizados y que la i está suscrita de A_i, es decir, que cada $i \in I$ es un índice. Esto se puede denotar de la siguiente manera:$\{A_i\}_{i\in I}$ (Lipschutz, 1970).

Ejemplo: definimos el conjunto $B_i = \{x \ / \ x \ es \ múltiplo \ de \ i\}$, donde $i \in \mathbb{Z}^+$, entonces tenemos que: $B_1 = \{1,2,3 \ldots\}, B_2 = \{2,4,6 \ldots\}, B_3 = \{3,6,9 \ldots\}, B_4 = \{4,8,12 \ldots\}$

Podemos observar que el conjunto de índices *i* es también B_1 y, asimismo, es el conjunto universal para los conjuntos indizados.

3.3 Familia de conjuntos

Sea una familia de conjuntos *A* que se define como aquel conjunto donde sus elementos son exclusivamente conjuntos. Generalmente se representa con letras mayúsculas caligrafiadas y, además, se pueden expresar a través de un conjunto de índices *I* de la forma siguiente: $A = \{A_i : i \in I\}$.

Ejemplo: sea $D = \left\{\{0\}, \{1,3\}, \{a, b, c\}, \{4, a\}\right\}$ una familia finita de conjuntos, donde se puede tomar como elementos de esta familia a los conjuntos D_1, D_2, D_3, D_4 definidos: $D_1 = \{0\}, D_2 = \{1,3\}, D_3 = \{a, b, c\}, D_4 = \{4, a\}$ y el conjunto de índices $I = \{1,2,3,4\}$. Se escribe notación de la siguiente forma: $D = \{D_i\}_{i \in I}$, es decir $D = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$.

Ejemplo: hallar los elementos de las siguientes familias de conjuntos A_i definido como: $A_i = \left\{2i + n \,/\, n = \dot{2} \wedge 1 < n \leq 6\right\}$, además $i = \{1,2,3,4\}$

Solución: los elementos del conjunto serán $A_i = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, de donde se tiene: $A_1 = \left\{2 + n/n = \dot{2} \wedge n \in (1,6]\right\} = \{4,6,8\}, A_2 = \left\{4 + n/n = \dot{2} \wedge n \in (1,6]\right\} = \{6,8,10\}$, $A_3 = \left\{6 + n \,/\, n = \dot{2} \wedge 1 < n \leq 6\right\} = \{8,10,12\}$ y $A_4 = \left\{8 + n \,/\, n = \dot{2} \wedge 1 < n \leq 6\right\} = \{10,12,14\}$.

3.4 Operaciones básicas generalizadas

3.4.1 Unión de familia de conjuntos.

Dada una familia finita de conjuntos $A = \{A_i : i \in I\}$ es decir $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ la unión de conjuntos de A, se define como aquel conjunto de todos los elementos que están en algún conjunto de A.

La unión de todos los A tiene se denota: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup, \ldots, \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

Entonces: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \,/\, \exists\, i \in I \text{ tal que } x \in A_i\}$.

Su caracterización lógica es: $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \leftrightarrow \exists\, i \in I \,/\, x \in A_i$.

O su equivalente: $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i \leftrightarrow \forall\, i \in I \,/\, x \notin A_i$.

3.4.2 Intersección de familia de conjuntos.

Dada una familia finita de conjuntos $A = \{A_i : i \in I\}$ es decir $A = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$, la intersección en todos los conjuntos de A se define como aquel conjunto de todos los elementos que están en todos los conjuntos de A.

La intersección se denota: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap, \ldots, \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Entonces: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \,/\, \forall\, i \in I \text{ tal que } x \in A_i\}$.

Su caracterización lógica es: $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \leftrightarrow \forall\, i \in I \,/\, x \in A_i$.

O su equivalente: $x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \leftrightarrow \exists\, i \in I \,/\, x \notin A_i$.

Ejemplo: sean los siguientes conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 que se definen como: $A_1 = \{4,8\}, A_2 = \{1,3,6,9\}, A_3 = \{5,6,8\}, A_4 = \{4,7,10\}, A_5 = \{3,5,6,9\}$ y el conjunto de índices $I = \{2,3,5\}$, entonces: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{1, 3, 5, 6, 8, 9\}$ y $\bigcap_{i \in I} A_i = \{6\}$.

Ejemplo: se denota a $D_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ tal que $n \in \mathbb{N}$, entonces: $D_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $D_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $D_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $D_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right], \ldots, D_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$.

Luego observamos que: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = [0, 1]$ y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \{0\}$.

3.4.2.1 Propiedades generales de la familia de conjuntos.

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de los conjuntos y E un conjunto cualquiera, se cumple:

a. $E\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)$

b. $E\cup(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(E\cup A_i)$

c. $E\cap(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(E\cap A_i)$

d. $E\cup(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(E\cup A_i)$

e. $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i)^c$.

si $x\in(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c \leftrightarrow x\notin\bigcap_{i=1}^{n} A_i \leftrightarrow \exists i\ /\ x\notin A_i$

f. $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c=\bigcap_{i=1}^{n}(A_i)^c$

si $x\in(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c \leftrightarrow x\notin\bigcup_{i=1}^{n} A_i \leftrightarrow \forall i\ /\ x\notin A_i$

Demostración: a) Si $E\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)$, entonces por demostrar que $E\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\subset\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)$ y $\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)\subset E\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$

Demostraremos que $E\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\subset\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)$, en efecto: sea $x\in E\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ $\rightarrow x\in E \wedge x\in\bigcup_{i=1}^{n} A_i \rightarrow x\in E \wedge x\in A_i$, para algún $i.\rightarrow x\in E\cap A_i$ $\rightarrow x\in\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)$. Por lo tanto $E\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\subset\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)$

Demostraremos que $\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)\subset E\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$, en efecto: sea $x\in\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)$ $\rightarrow x\in E\cap A_i$, para algún $i.\rightarrow x\in E \wedge x\in A_i \rightarrow x\in E \wedge x\in(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ $\rightarrow x\in E\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$. Por lo tanto $\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)\subset E\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$.

Finalmente, de ambos resultados concluimos que $E\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)$.

3.5 Partición y cubrimiento

3.5.1 Cubrimiento.

Decimos que una familia de conjuntos $\{A_i\}, i \in I$, con $A_i \neq \emptyset$, es un cubrimiento de un conjunto B (o que cubre un conjunto B), si su unión contiene a B, es decir $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$

Ejemplo: sean el conjunto $B = \{x \in Z^+ \,/\, x = \dot{2} \wedge 1 < x \leq 8\}$ y la familia de conjuntos $A_1 = \{2,3,5,7\}$, $A_2 = \{5,6,8,9\}$, $A_3 = \{1,4,10\}$ se nota que *B* es un cubrimiento de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ pues $B = \{2,4,6,8\} \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

3.5.2 Partición.

Se dice que una familia de conjuntos $\{A_i\}, i \in I$, con $A_i \neq \emptyset$, es una partición de un conjunto *B*, si:

$B = \bigcup_{i \in I} A_i$

Los conjuntos de la forma A_i son disjuntos dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$).

3.5.2.1 Propiedad.

Toda partición es un cubrimiento. En efecto, pues si $B = \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$

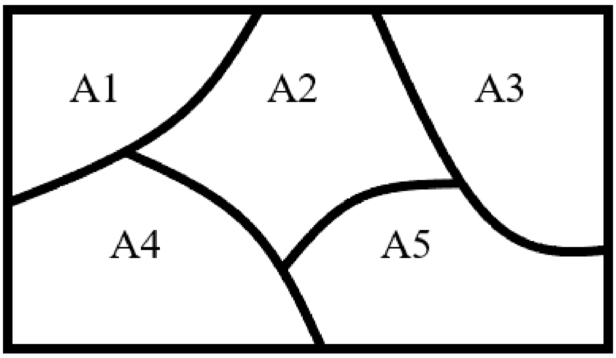


Figura 9. Partición de una familia de conjuntos. Fuente: Lipschutz, 2009.

Ejemplo: sea el conjunto $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y la familia de conjuntos: A_1, A_2 y A_3 definidas como: $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e\}$, $A_3 = \{f, g\}$ conforman una partición del conjunto B, pues:

$A_1 \subset B, A_2 \subset B$ y $A_3 \subset B$.

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ y $A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{a, b, c, d, e, f, g\} = B$.

Aplicación didáctica

Experiencia de aprendizaje

I. Datos generales

1.1. Nivel	:	Secundaria
1.2. Área	:	Matemática
1.3. Grado	:	5to.
1.4. Tiempo	:	40 minutos
1.5. Fecha	:	16 – 09- 2021
1.6. Docente	:	Percy Tintaya Huallpa
1.7. Título	:	El mundo de los conjuntos

II. Aprendizaje esperado

Competencia	Resuelve problemas de cantidad
Capacidades	Traduce cantidades a expresiones numéricas. Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones. Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
Propósito	Plantear, establecer relaciones y resolver problemas en mérito a los tipos y operaciones de conjuntos. Asimismo, combinamos y empleamos estrategias heurísticas, métodos gráficos y propiedades sobre conjuntos.

III. Proyección de actividades

Actividad 1	Actividad 2
Se reconoce los tipos y operaciones de conjuntos en los problemas y se ejecuta.	Repesentamos a los conjuntos mediante el diagrama de Venn y los resolvemos.
El docente hace la conexión con los estudiantes haciendo uso del grupo de Whatsapp y el zoom. Previamente, manda la invitación y/o el ID. El docente les presenta los acuerdos de convivencia. El docente les presenta las operaciones de conjuntos usando la pizarra virtual, así como mediante imágenes, para que respondan las preguntas de la actividad. Los estudiantes analizan y resuelven las actividades propuestas .	El docente hace la conexión con los estudiantes haciendo uso del grupo de Whatsapp y el zoom. Previamente, mada la invitación y/o el ID. El docente les presenta los acuerdos de convivencia. El docente les presenta a los estudiantes un video acerca de los conjuntos en la vida cotideana y tambien hace uso de la pizarra virtual para su complementación.

Los estudiantes asumen compromisos sobre el cumplimiento de la actividad asignada (reto). El docente complementa la actividad mediante una retroalimentación, luego envía las actividades mediante la plataforma classroom y whatsapp.	Los estudiantes resuelven las actividades propuestas . Los estudiantes asumen compromisos sobre el cumplimiento de la actividad asignada (reto). El docente complementa la actividad mediante diapositivas, luego envía las actividades mediante la plataforma classroom y whatsapp.

IV. Evaluamos nuestros avances

Criterios de evaluación	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establece las diferencias entre las clases de conjuntos.			
Comprende cada una de las operaciones de conjuntos.			
Relaciona datos y elementos y los expreso mediante el diagrama de Venn.			

Síntesis

En este trabajo se expones la teoria de conjuntos, iniciado desde el enfoque axiomático, en el cual desarrollamos de manera secuencial los puntos que detallo a continuación.

Iniciamos con una breve reseña sobre el inicio de la teoría de conjuntos, tomando los conceptos primitivos: al conjunto, elementos y la relación de pertenencia. Luego de ello definimos algunos conceptos que usaremos; además, mencionamos el lenguaje básico y también las nociones sobre el concepto de conjunto; para luego enunciar cada uno de los axiomas que fortalecen esta teoría, los cuales son:

Axioma de extensión.

Axioma de existencia.

Axioma de separación.

Axioma del par.

Axioma de la unión.

Axioma de las partes.

En este capítulo enunciamos la paradoja de Russell, el cual hizo temblar al mundo de las matemáticas y, además, tomamos algunos conjuntos especiales como: conjunto universal, conjuntos disjuntos y el conjunto de las partes.

En la segunda parte definimos cada una de las operaciones de la teoría de conjuntos, como son: intersección, unión, diferencia, diferencia simétrica y complemento. Además, colocamos una serie de ejercicios resueltos sobre la teoría de conjuntos.

Finalmente, en la tercera parte generalizamos las operaciones básicas de conjuntos, como son la unión y la intersección, a través de la familia de conjuntos; y, para concluir, analizamos qué es un cubrimiento y una partición de conjuntos.

Apreciación crítica y sugerencias

En el presente trabajo monográfico, todos los conceptos y definiciones de los textos utilizados para desarrollar la teoría de conjuntos son de amplio contenido, pues lo que se busca en este trabajo es generar el interés de los estudiantes de una manera sencilla.

Por otro lado, algunos de los textos no llevan un orden secuencial para el buen entendimiento de este tema y utilizan un lenguaje lógico, el cual se debe de tener conocimiento previamente antes del estudio de los conjuntos.

Muchos de estos texto estan orientados para el nivel superior y no para la educación básica regular, el cual limita el conocimiento profundo de la teoría de conjuntos.

Como reflexión final, podemos decir que este trabajo conlleva a realizar estudios más exhaustivos y didácticos, para de esta manera generar el interés por este tema y materias afines.

Las sugerencias que presentaremos a continuación son:

Antes de abordar este tema, se debe de enseñar el uso correcto del lenguaje lógico, para de esta manera tener una mejor comprensión de la teoría de conjuntos.

Los textos deben de tener una secuencialidad didáctica, que permita al estudiante entender desde la parte axiomática hasta las generalidades de conjuntos.

Se debe incluir en los textos de la educación básica regular la teoría de conjuntos, en cuyo efecto se debe usar el lenguaje lógico proposicional.

Referencias

Cignoli, R. (2016). *Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción.* Buenos Aires, Argentina. Recuperado de http://cms.dm.uba.ar/depto/public/grado/fascgrado8.pdf

Espinoza, E. (2005). *Matemática básica* (2da. ed.). Lima, Perú.

Figueroa, R. (2013). *Matematica Básica 1* (8va ed.). Lima, Perú: RFG.

Halmos, P. (1973). *Teoría intuitiva de los conjuntos* (8va. ed.). México D.F., México: Continental S.A. Recuperado de https://academicos.azc.uam.mx/cbr/Cursos/UEA_MDPC/Almos_1973_Axims_Ext_Esp.pdf

Hernández, F. (1998). *Teoría de conjuntos* (2da. ed.). Distrito Federal de Mexico: Sociedad matemática mexicana. Recuperado de https://es.scribd.com/doc/125912204/Fernandez-teoria-de-Conjuntos

Lazaro, M. (2012). *Matemática básica.* Lima, Perú: Moshera S.R.L. Recuperado de https://kupdf.net/queue/matematica-basica-moises- azaro_58f59340dc0d60824ddla9886_pdf?queue_id=-1&x=1631166587&z=MjAxLjI0MC4xNDcuMTEz

Lewin, R. A. (2006). *Teoría axiomática de conjuntos* (Versión Preliminar ed.). Santiago de Chile, Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile . Recuperado de https://www.yumpu.com/es/document/read/14381496/teoria-axiomatica-de-conjuntos-facultad-de-matematicas-

Lipschutz, S. (1970). *Teoría de Conjuntos y Temas Afines* (1ra. ed.). México, México: McGraw Hill. Recuperado de https://norbertomn.files.wordpress.com/2013/09/teoria-de-conjuntos-y-temas-afines.pdf

Lipschutz, S. (2009). *Matemáticas discretas* (3ra. ed.). México, D. F., México: McGraw-Hill. Recuperado de https://www.academia.edu/37114530/Matem%C3%A1ticas_discretas_Schaum_Lipschutz_and_Lipson_3ed

Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos* (4ta. ed.). Bogotá, Colombia : Panamericana. Recuperado de https://www.academia.edu/36872835/Mu%C3%B1oz_Q_Jos%C3%A9_M_Teor%C3%ADa_de_Conjuntos_1_

Murillo, M. (2010). *Introducción a la Matemática Discreta* (4ta. ed.). Cartago, Costa Rica: Tecnológica de Costa Rica.

Oubiña, L. (1974). *Introducción a la teoría de conjuntos* (7ma. ed.). Buenos Aires, Argentina: Universitaria de Buenos Aires . Recuperado de https://www.academia.edu/41341394/Introduccion_a_la_teoria_de_conjuntos_Lia_Oubi%C3%B1a

Zaenz, J., Gil, F., Lopez, B., Romero, N., & Bethelmy, J. (2001). *Fundamentos de la Matematica* (2da. ed.). Barquisimeto, Venezuela: Hipotenusa. Recuperado de https://archive.org/details/fundamentosdelamatematicajorgesaenz/page/n101/mode/2up

Apéndices

Apéndice A: Actividad 1

Apéndice B: Actividad 2

Apéndices A: Actividad 1

1. Si los conjuntos: $A = \{2x + 3y, 10\}$; $B = \{29, x + y\}$ son iguales. Calcule $y - x$
2. Hallar el conjunto C por extensión y determina cuántos subconjuntos tiene, es definido por: $C = \{x^2 + 1 \,/\, x \in \mathbb{Z};\ -3 < x \leq 4\}$.
3. Si el siguiente conjunto $D = \{a + b, 8{,}2a - 2b + 4\}$, es unitario. Halle $a^4 + b^4$.
4. Cuántos subconjuntos propios tiene el conjunto: $M = \big\{2{,}3, \{2\}, 3{,}2, \{2\}, \{3\}\big\}$.
5. Dados los conjuntos unitarios $P = \{x + y, 8\}$; $Q = \{y + z, 10\}$; $S = \{x + z, 12\}$. Calcule: $x + y + z$.
6. Colocar el valor de verdad o falsedad en cada proposición si: $A = \big\{2{,}3, \{1\}, \{1{,}2\}\big\}$.

   $\emptyset \in A$ ( )　　$3 \in A$ ( )　　$1 \notin A$ ( )

   $\{1\} \in A$ ( )　　$\{3\} \subset A$ ( )　　$\emptyset \subset A$ ( )

Apéndices B: Actividad 2

1. Dados los conjuntos: $A = \{\, x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, x \in (2,6)\}$; $B = \{x^2 + 1/\, x \in \mathbb{Z}; x \in (1,4)\}$ y $C = \{x - 2/\, x \in \mathbb{Z} \wedge x \in (4,6)\}$, ¿cuántos elementos tiene la operación: $(B \cup A) - (A \cap C)$?
2. Determinar: $E = (A - B) \cap (B - C)$. Si $A = \{x/\, x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x\ es\ divisor\ de\ 12\}$, $B = \{x/\, x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x\ es\ divisor\ de\ 18\}$ y $C = \{x/\, x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x\ es\ divisor\ de\ 16\}$. Dar como respuesta el número de elementos de E.
3. Sean los conjuntos $A = \{\, 1,5,7,8,9\}$; $B = \{\, 1,5,8,9\}$; $C = \{\, 1,8\}$; $D = \{\, 1,7,9\}$. Hallar: $(A\Delta C) - (B\Delta D)$.
4. En un club hay 80 personas, los que no practican ni atletismo ni futbol son 30, los de atletismo son 20 y los de fulbito y atletismo, a la vez, son 6. ¿Cuántos realizan un solo deporte?